Култаев Т.Ч., Момбекова Г.Б.

МАТЕМАТИКАЛЫК СТАТИСТИКАНЫН МАСЕЛЕЛЕР ЖЫЙНАГЫ

Ош - 2008

ОшМУнун Окумуштуулар Кеңешинин 2008-жылдын 25-июнундагы
№9-жыйынынын токтомунун негизинде басмага сунушталды

Даярдагандар: ф.-м.и.к., доцент Т.Ч.Култаев,
окутуучу Г.Б.Момбекова.

Рецензент: Физика-математика илимдеринин доктору,
Кыргыз–Өзбек Университетинин профессору
А.Дж.Сатыбаев.

Култаев Т.Ч., Момбекова Г.Б.
Математикалык статистиканын маселелер жыйнагы.
– Ош: « Билим», 2008. – 122 б.

Жыйнак математикалык статистиканын маселелерин камтыган жана кээ бир мисалдардын чыгарылыштары сунушталган.

Усулдук колдонмо экономика, колдонмо математика ж.б. багыттагы окуучу студенттерге жана ошол тармактагы иштеген адистерге арналган.

МАЗМУНУ

Кириш сөз

Колдонмо математиканын негизги бөлүмү болуп эсептелген «Математикалык статистика» экономикадабы, техникадабы, медицинадабы, экологиядабы же күндөлүк турмуштабы, ошондой эле, жана башка илимдин тармактарында өтө эле көп колдонулаары чындык. Бирок, ушул күнгө чейин, эмнегедир, бул бөлүм боюнча, кыргыз тилинде жазылган окуу-усулдук көрсөтмөлөр аз санда. Бул маселелер жыйнагынын түзүлүш тарыхы, идеясы – ошол айтылган кемчиликти, бир аз болсо да, жоюу аракетинде.

Усулдук көрсөтмө 7 бөлүмдөн, 22 параграфтан турат.

Китепче, жогорку окуу жайларда даярдалуучу, келечектеги экономист, колдонмо математика ж.б. багыттагы окуучу студенттерге жана ошол тармактагы иштеген адистерге арналган.

Колуңуздардагы «Математикалык статистиканын маселелер жыйнагы» аттуу окуу-усулдук көрсөтмөнү рецензиялаган, окуулуктун сапатын жогорулатуу үчүн өзүнүн баалуу сын-пикирин айткан физика-математика илимдеринин доктору, Кыргыз-Өзбек Университетинин профессору А.Дж.Сатыбаевге чоң ыраазычылыгыбызды билдиребиз. Ошондой эле, китебче боюнча, ар кандай сунуштарды ОшМУнун «Экономикадагы математикалык методдор» кафедрасында күтөбүз, алдын ала рахмат айтуу менен

Авторлор

Биринчи бөлүм

Эмпирикалык бөлүштүрүү

§1. Тандалма жана вариациялык катар

F - чыныгы түздөгү кандайдыр бир бөлүштүрүү болсун. F *бөлүштүрүүсүнөн алынган* n *көлөмдүү тандалма* деп, жалпы F бөлүштүрүүсүнө ээ болгон $X_1,...,X_n$ көз карандысыз кокустук чоңдуктарынын удаалаштыгын айтабыз.

Статистика деп, тандап алуунун кааалагандай өлчөнүүчү функциясы, б.а. $S(X_1,...,X_n)$ түрүндөгү кокустук чоңдук аталат, мында S - R^n ден R ге өтүүчү Борель боюнча өлчөнүүчү функция.

Статистиканын негизги мисалдары болуп, тандалманын моменттери эсептелинет. Тандалманын орточо мааниси үчүн

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

белгилөөсү, ал эми k-тартиптеги тандалманын моменти үчүн

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

белгилөөсү пайдаланылат.

Жалпысынан айтканда, каалаган $g: R \to R$ функциясы үчүн

$$\overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

аткарылат.

Тандалма дисперсиясы үчүн

$$S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \text{ жана } S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

белгилөөлөрү пайдаланылат.

Статистиканын башка негизги мисалдары вариациялык катар түшүнүгү менен байланышкан. Эгерде тандалманын бардык $X_1,...,X_n$ элементтери алардын чоңдуктары боюнча кемибөө тартибинде жайгашса жана мындай кемибөөчү удаалаштыктын мүчөлөрү $X_{(k)}: X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$ деп белгиленсе, анда ар бир $X_{(k)}$ *ирээттелген статистика* деп, ал эми ага тиешелеш болгон кемибөөчү удаалаштык n көлөмүндөгү $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган *вариациялык катар* деп аталат.

Вариациялык катардын k-орунунда турган $X_{(k)}$ нын мааниси k*-ирээтелген статистикасы* деп аталат. $X_{(1)}$ кокустук чоңдугу *вариациялык катардын минималдык мүчөсү* деп, ал эми $X_{(n)}$ *максималдык мүчөсү* деп аталат.

Тандалманын медианасы деп,

$$\zeta^* = \begin{cases} X_{(m)}, \text{ эгерде } n = 2m-1 \text{ (так)} \\ \dfrac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2}, \text{ эгерде } n = 2m \text{ (жуп)} \end{cases}$$

статистикасы аталат.

$\delta \in (0,1)$ *деңгээлиндеги* ζ^*_δ *тандалма квантили* деп, $X_{([n\delta]+1)}$ ирээтелген статистикасы аталат, мында $[x]$ - бул x санынын бүтүн бөлүгү.

1.1. $X_1,\dots,X_n$ - $[a,b], a < b,$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында a параметринин мааниси белгилүү. Төмөндөгү функциялардын кайсылары статистика болуп саналат:

а) $2\overline{X}$;

б) $X_{(n)} - a/n$;

в) $(a+b)/2$;

г) $\overline{X}$;

д) $X_1/(b-a)$;

е) $\sum_{i=1}^{n} X_i$;

ж) 199;

з) $X_1 + X_3 + 1$;

и) $X_{(1)}$?

Чыгаруу. а), б) функциялары статистика болуп саналышат, себеби алар тандалманын элементтеринен гана көз каранды; в) бул функция статистика болбойт, себеби белгисиз b параметринен көз каранды.

1.2. $X_1,\dots,X_n$ - параметри $\lambda > 0$ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Төмөндөгү функциялардын кайсылары статистика болуп саналат:

а) $\dfrac{\lambda^{\sum X_i}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda}$;

б) 201;

в) $\overline{X}$;

г) $X_1 - \lambda$;

д) $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \lambda)^2$;

е) $\sum_{i=1}^{n} X_i$;

ж) $\prod_{i=1}^{n} X_i^2$;

з) $\lambda^2 + \lambda$;

и) $X_{(n)}$?

1.3. $X_1,\dots,X_n$ - параметрлери a жана σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) $\overline{X}$ статистикасынын орточо маанисин жана дисперсиясын эсептегиле. $\overline{X}$ кандай бөлүштүрүүгө ээ болот?

б) Тандалма медианасынын орточо маанисин эсептегиле.

в) S^2 жана S_0^2 статистикаларынын орточо маанилерин эсептегиле.

1.4. $X_1,...,X_n$ - λ параметрлүү Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ статистикасынын орточо маанисин жана дисперсиясын эсептегиле. $\overline{X}$ статистикасы Пуассондук бөлүштүрүүгө ээ болобу? $\overline{X}$ статистикасы нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болобу?

1.5. $X_1,...,X_n$ - $[a,b]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ статистикасынын орточо маанисин жана дисперсиясын эсептегиле. $\overline{X}$ статистикасы Пуассондук бөлүштүрүүгө ээ болобу? $\overline{X}$ статистикасы нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болобу?

1.6. $X_1,...,X_n$ - параметри 3 болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Тандалманын $Y_1,...,Y_n$ бөлүштүрүүсүн тапкыла, мында $Y_i = 1 - e^{-3X_i}$.

Чыгаруу. $y \in [0,1)$ чекитиндеги Y_1 кокустук чоңдугунун бөлүштүрүү функциясынын мааниси төмөнкүгө барабар:

$$P\{Y_1 < y\} = P\{1 - e^{-3X_1} < y\}$$

$$= P\left\{X_1 < -\frac{in(1-y)}{3}\right\} = 1 - e^{\ln(1-y)} = y.$$

Анда $Y_1,...,Y_n$ - $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болот.

1.7. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f(y) = \begin{cases} 2y, \ y \in [0,1] \\ 0, \ y \notin [0,1] \end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = X_i^2$?

1.8. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f(y) = \begin{cases} 2/y^3, \ y \ge 1 \\ 0, \ y < 1 \end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = 1 - 1/X_i^2$?

1.9. $X_1,...,X_n$ - $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = -\ln X_i$?

1.10. $X_1,...,X_n$ - $F(y)$ бөлүштүрүү функциясы үзгүлтүксүз жана тапатак өсүүчү болгон кандайдыр F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = F(X_i)$?

1.11. $X_1,...,X_n$ - $F(y)$ үзгүлтүксүз бөлүштүрүү функциясына ээ болгон кандайдыр F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = F(X_i)$?

1.12. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = F(X_i)$, $F(y)$- Бернуллинин бөлүштүрүү функциясы?

1.13. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот, мында $Y_i = F(X_i)$, $F(y)$- Пуассондун бөлүштүрүү функциясы?

1.14. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы f болгон кандайдыр F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда бардык ирээттелген $(X_{(1)},...,X_{(n)})$ статистикаларынын биргелешкен тыгыздыгын тапкыла.

1.15. Тандалманын элементтеринин жалпы бөлүштүрүү функциясынын termининде төмөндөгү бөлүштүрүү функцияны тапкыла:

а) $X_{(n)}$ вариациялык катарынын максималдык мүчөсүнүн;

б) $X_{(1)}$ вариациялык катарынын минималдык мүчөсүнүн.

Чыгаруу. а) $\{X_{(n)} < y\}$ окуясы $\{X_1 < y,...,X_n < y\}$ окуясы менен дал келгендиктен жана $X_1,...,X_n$ кокустук чоңдуктары көз карандысыз болгондуктан, төмөндөгү барабардыкка ээ болобуз:

$$P\{X_{(n)} < y\} = P\{X_1 < y,...,X_n < y\}$$

$$= P\{X_1 < y\} \cdot ... \cdot P\{X_n < y\} = F^n(y).$$

1.16. Тандалманын элементтеринин жалпы бөлүштүрүү функциясынын termининде $P\{X_{(k)} < y, X_{(k+1)} \geq y\}$ ыктымалдуулугун тапкыла.

1.17. $F(y)$ жалпы бөлүштүрүү функциясынын termининде k-ирээттелген статистика $X_{(k)}$ нын бөлүштүрүү функциясын тапкыла.

1.18. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн төмөндөгү бөлүштүрүү тыгыздыгын тапкыла:

а) $X_{(1)}$ вариациялык катарынын минималдык мүчөсүнүн;

б) $X_{(n)}$ вариациялык катарынын максималдык мүчөсүнүн;

в) $X_{(k)}$ k -ирээттелген статистикасынын.

Чыгаруу. в) 1.17 маселенин жообун пайдаланабыз жана тыгыздыкты $X_{(k)}$ чоңдугунун бөлүштүрүү функциясынын көбөйтүндүсү катары эсептейбиз:

$$
\begin{aligned}
f(y) &= \frac{d}{dy}\sum_{i=k}^{n} C_n^i y^i(\theta-y)^{n-i}/\theta^n \\
&= \frac{1}{\theta^n}(\sum_{i=k}^{n} iC_n^i y^{i-1}(\theta-y)^{n-i} - \sum_{i=k}^{n-1}(n-i)C_n^i y^i(\theta-y)^{n-i-1}) \\
&= nC_{n-1}^{k-1}y^{k-1}(\theta-y)^{n-k}/\theta^n;
\end{aligned}
$$

мында $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$ жана $(n-i)C_n^i = nC_{n-1}^i$ барабардыктары пайдаланылды.

Тыгыздыкты үзгүлтүксүз эсептөөгө да мүмкүн: $f(y)dy = P_\theta\{X_{(k)} \in (y, y+dy)\}$.

$\{X_{(k)} \in (y, y+dy)\}$ окуясы тандалманын n элементинин бирөө dy көптүгүндөгү маанилерди, $k-1$ элементи y тин сол жагындагы маанилерди, $n-k$ элементи y тин оң жагындагы маанилерди кабыл алышат. Бул окуянын ыктымалдыгын полиномиалдык бөлүштүрүүгө тиешелеш түрдө эсептейбиз:

$$
\begin{aligned}
P_\theta\{X_{(k)} \in (y, y+dy)\} &= \frac{n!}{(k-1)!!!(n-k)!}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{k-1}\frac{dy}{\theta}\left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^{n-k} \\
&= \left(nC_{n-1}^{k-1}y^{k-1}(\theta-y)^{n-k}/\theta^n\right)dy.
\end{aligned}
$$

Анда, $X_{(k)}$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгы $nC_{n-1}^{k-1}y^{k-1}(\theta-y)^{n-k}/\theta^n$ ге барабар. Мында, $X_{(k)}/\theta$ чоңдугу k жана $n-k+1$ параметрлүү бета-бөлүштүрүүгө ээ экендигин белгилеп кетүү керек.

1.19. Тыгыздыгы f болгон F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма үчүн төмөнкү бөлүштүрүүлөрдүн тыгыздыгын тапкыла:

а) $X_{(1)}$ вариациялык катарынын минималдык мүчөсүнүн;

б) $X_{(n)}$ вариациялык катарынын максималдык мүчөсүнүн;

в) $X_{(k)}$ k -ирээттелген статистикасынын.

1.20. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн орточо маанини, экинчи моментти жана дисперсияны тапкыла:

а) $X_{(1)}$ вариациялык катарынын минималдык мүчөсү үчүн;

б) $X_{(n)}$ вариациялык катарынын максималдык мүчөсү үчүн;

в) k -ирээттелген статистика $X_{(k)}$ үчүн.

1.21. $X_1, \ldots, X_n$ - бул $P\{X_1 = m\} = p_m$, $\sum_{m=0}^{N} p_m = 1$ ыктымалдуугуна ээ болгон дискреттүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда k -ирээттелген статистика $X_{(k)}$ нын бөлүштүрүүсүн тапкыла.

1.22. Кандайдыр бир F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма үчүн вариациялык катардын максималдык жана минималдык мүчөлөрүнүн бөлүштүрүлүшүнүн биргелешкен функциясын тапкыла.

1.23. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн төмөнкүлөрдү тапкыла:

а) вариациялык катардын $X_{(1)}$ минималдык мүчөсү жана $X_{(n)}$ максималдык мүчөсүнүн биргелешкен тыгыздыгын;

б) вариациялык катардын $X_{(1)}$ минималдык мүчөсү жана $X_{(n)}$ максималдык мүчөлөрүнүн ковариациясын;

в) $X_{(k)}$ жана $X_{(j)}, 1 \le k \le j \le n$ нын биргелешкен тыгыздыгын;

г) $X_{(k)}$ жана $X_{(j)}, 1 \le k \le j \le n$ нын ковариациясын.

1.24. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин.

а) $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ кокустук чоңдуктары көз карандысыз экендигин далилдегиле.

б) Вариациялык катардын минималдык мүчөсү $X_{(1)}$ кандай бөлүштүрүүгө ээ болот?

в) Ирээтелген $X_{(k)}$ жана $X_{(k+1)}$ кошуна статистикаларынын айырмасы кандай бөлүштүрүүгө ээ болот?

г) Барабардыктын тууралыгын далилдегиле:

$EX_{(k)} = a^{-1}((n-k+1)^{-1} + \dots + n^{-1}).$

1.25. Төмөнкү ой-жоруудан каталыкты тапкыла: «Кандайдыр бир бөлүштүрүүдөн алынган $X_1, \dots, X_n$ тандалмасы берилсин. Ар бир элементардык жыйынтыкта $X_{(n)}$ кокустук чоңдугу тандалманын бир элементи менен дал келсе, анда $X_{(n)}$ дагы X_1 дей эле бөлүштүрүүгө ээ болот».

1.26. F бөлүштүрүүсүнөн

$\lim\limits_{y\to\infty} y(1 - F(y) + F(-y)) = 0$

боло тургандай тандалма берилген. Ыктымалдуулугу боюнча $X_{(1)}/n \to 0$ жана $X_{(n)}/n \to 0$ экендигин далилдегиле.

1.27. Чектүү орточо маанисине ээ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Анда $X_{(1)}/n \to 0$ жана $X_{(n)}/n \to 0$ мүмкүн экендигин далилдегиле.

1.28. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн төмөнкү кокустук чоңдуктардын $n \to \infty$ дагы пределин тапкыла:

а) $nX_{(1)}/\theta$; б) $n(\theta - X_{(n)})/\theta$.

1.29. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. k натуралдык санын фиксирлеп коебуз. Төмөндөгү кокустук чоңдуктар $n\to\infty$ да параметрлери 1 жана k болгон Γ-бөлүштүрүүсүнө алсыз жыйнала тургандыгын далилдегиле:

а) $nX_{(k)}/\theta;$ б) $n(\theta - X_{(n-k+1)})/\theta.$

Чыгаруу. а) 1.18 в) мисалынын чыгарылышын пайдаланып, $y<n$ болгондо $nX_{(k)}/\theta$ чоңдугунун бөлүштүрүлүшүнүн $f_n(y)$ тыгыздыгын жазабыз:

$$f_n(y) = C_{n-1}^{k-1}(y/n)^{k-1}(1-y/n)^{n-k}.$$

Акыркы туюнтма Бернулли схемасындагы ийгилик ыктымалдыгы $p_{n-1} = y/n$ болгон $n-1$ жолку сыноодо $k-1$ жолу ийгиликке жетишүү ыктымалдыгына барабар. Каалагандай $y\in[0,n]$ үчүн Пуассон теоремасындагы жыйналуу ылдамдыгынын баалоосун пайдалансак төмөнкү баалоого ээ болобуз:

$$\left| f_n(y) - \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}e^{-y} \right| \le (n-1)p_{n-1}^2 \le y^2/n.$$

Анда каалагандай компакттан алынган $y\ge 0$ боюнча $f_n(y)$ тыгыздыгынын Γ - бөлүштүрүү тыгыздыгына бир калыпта жыйналат:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}e^{-y} = \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-y}.$$

Тыгыздыктардын бир калыптагы жыйналуучулугу $nX_{(k)}/\theta$ чоңдугунун бөлүштүрүлүшүнүн параметрлери 1 жана k болгон Γ-бөлүштүрүүсүнө алсыз жыйнала тургандыгына алып келет.

1.30. $F(y)$ үзгүлтүксүз бөлүштүрүү функциясы менен бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Төмөнкү кокустук чоңдуктардын каалагандай фиксирленген $k\ge 1$ үчүн $n\to\infty$ дагы алсыз пределин тапкыла:

а) $nF(X_{(k)});$ б) $n(1-F(X_{(n-k+1)})).$

1.31. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Каалагандай фиксирленген $k\ge 1$ жана $j\ge 1$ үчүн

$(nX_{(k)}/\theta, n(\theta - X_{(n-j+1)})/\theta)$

кокустук векторунун $n\to\infty$ дагы биргелешкен пределин тапкыла.

1.32. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Каалагандай фиксирленген $k\ge 1$ жана $j\ge 1$, $k<j$ үчүн

$(nX_{(k)}/\theta, nX_{(j)}/\theta)$

кокустук векторунун $n \to \infty$ дагы биргелешкен пределин тапкыла.

1.33. $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Эгерде k жана n дер $k/n \to p$ аткарыла тургандай болуп өсүшсө, анда $\sqrt{n}(X_{(k)} - k/n)$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүлүшү нөлдүк орточо жана $p(1-p)$ дисперсиясына ээ болгон нормалдуу законго алсыз жыйнала тургандыгын көрсөткүлө.

1.34. $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Эгерде k, j жана n дер $k/n \to p$ жана $j/n \to s, p < s$ аткарыла тургандай болуп өсүшсө, анда

$$(\sqrt{n}(X_{(k)} - k/n), \sqrt{n}(X_{(j)} - j/n))$$

кокустук чоңдугунун бөлүштүрүлүшү эки ченемдүү нормалдуу законго алсыз жыйнала тургандыгын көрсөткүлө. Пределдик бөлүштүрүүнүн параметрлерин тапкыла.

1.35. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. $\alpha X_{(n)} - \ln n$ айырмасынын бөлүштүрүүсүнүн алсыз пределин тапкыла.

§2. Бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы

Каалагандай $B \subseteq R$ борелдик көптүгү үчүн

$$P_n^*(B) = \frac{\nu_n(B)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \in B\}$$

барабардыгы менен аныкталган жана $X_1, ..., X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүү P_n^* *эмпирикалык бөлүштүрүүсү* деп аталат, мында $\nu_n(B)$ - бул B көптүгүнө тиешелеш болгон тандалманын элементтеринин саны. Ар бир фиксирленген P_n^* элементардык жыйынтыгы R де бөлүштүрүүгө ээ болот. Ар бир фиксирленген B борелдик көптүгү үчүн $P_n^*(B): \Omega \to R$ чагылтуусу кокустук чоңдук болот.

$X_1, ..., X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган

$$F_n^*(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i < y\}$$

функциясы *бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы* деп аталат. Аныктоонун негизинде $F_n^*(y) = P_n^*((-\infty, y))$ барабардыгы аткарылат. Ар бир фиксирленген P_n^* элементардык жыйынтыгы үчүн F_n^* функциясы

R де бөлүштүрүү функциясы болот. Ар бир фиксирленген y саны үчүн $F_n^*(y):\Omega \to R$ чагылтуусу кокустук чондук болот.

Төмөнкү орун алат

Гливенко-Кантелла теоремасы. $F(y)$ - тандалма элементтеринин жалпы бөлүштүрүү функциясы болсун. Анда $n \to \infty$ да

$$\sup_{y \in R} \left| F_n^*(y) - F(y) \right| \to 0$$

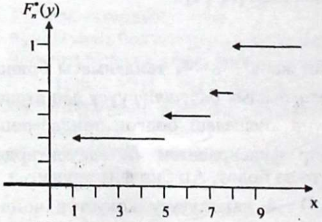
жыйналуучулугу негизинен мүмкүн болот.

2.1. $(-0{,}8;2{,}9;4{,}3;-5{,}7;1{,}1;-3{,}2)$ - тандалманын байкалган маанилери болушсун. Бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясын тургузгула жана $F_6^*(-5)=1/6,\ F_6^*(0)=1/2,\ F_6^*(4)=5/6$ экендигин текшергиле.

2.2. $(3;0;4;3;6;0;3;1)$ - тандалманын байкалган маанилери болушсун. Бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясын тургузгула жана $F_8^*(1)=1/4,\ F_8^*(3)=3/8,\ F_8^*(5)=7/8$ экендигин текшергиле.

2.3. Параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган n көлөмдөгү тандалма боюнча бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы $F_n^*(y)$ тин графигин тургузгула.

2.4. Төмөндөгү бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясына тиешелеш келген түрдүү көлөмдөгү жок дегенде 2 тандалманы тапкыла:



Чыгаруу. Төмөнкү тандалмаларды алууга мүмкүн: $(1,1,5,7,8,8)$, же $(1,5,1,7,8,8)$, же $(1,1,1,1,8,8,8,8,7,7,5,5)$.

2.5. Эгерде тандалманын көлөмү белгилүү болсо, 2.4-мисалдагы $F_n^*(y)$ функциясы боюнча баштапкы тандалманы тургузууга мүмкүнбү? Вариациялык катарды тургузууга мүмкүнбү? Ал эми тандалма көлөмү белгисиз болгон учурдачы?

2.6. $F_n^*(y)$ - көлөмү n болгон $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы жана a - оң бүтүн сан болсун. Анда $F_n^*(ay)$ функциясы бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болобу? Эгер болсо, анда ал кайсы тандалмага тиешелеш келет?

2.7. $a > 0$ жана b - фиксирленген эки чыныгы сан болсун. F_n^* - бул $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы, ал эми G_n^* - бул $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болсун, мында $Y_i = aX_i + b$. Бардык y тер үчүн

$$G_n^*(y) = F_n^*\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

барабардыгы аткарыла тургандыгын далилдегиле.

2.8. $F_n^*(y)$ - көлөмү n болгон $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болсун. Төмөнкү функциялар бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болушабы:

а) $F_n^*(y^3)$; б) $(F_n^*(y))^3$?

Эгерде болушса, анда кайсы тандалмага тиешелеш болот?

2.9. F_n^* - көлөмү n болгон $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы, ал эми G_n^* - ошол эле n көлөмүнө ээ болгон $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болсун. Анда $(F_n^*(y) + G_n^*(y))/2$ функциясы бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болобу? Эгер болсо, анда ал кайсы тандалмага тиешелеш келет?

2.10. F_n^* - $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы, ал эми G_n^* - $Y_1,...,Y_n$ тандалмасы боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болсун, мында $Y_i = G(X_i)$ жана G - монотондуу өсүүчү үзгүлтүксүз функция. Анда бардык y жана υ үчүн

$$P\{F_n^*(y) < \upsilon\} = P\{G_n^*(G(y)) < \upsilon\}$$

барабардыгынын туура экендигин далилдегиле.

2.11. $X_1,...,X_n$ - бул F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда каалагандай $y \in R$ жана $k \in \{0,1,...,n\}$ үчүн

$$P\{F_n^*(y) = k/n\} = C_n^k F^k(y)(1-F(y))^{n-k}$$

барабардыгынын туура экендигин далилдегиле.

2.12. F бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма үчүн төмөнкүлөрдү тапкыла:

а) $EF_n^*(y)$; б) $DF_n^*(y)$; в) $D(F_n^*(z) - F_n^*(y))$.

2.13. Параметрлери p жана m болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн

$$P\{F_n^*(y+0)-F_n^*(y)=k/n\}$$

ны тапкыла.

2.14. $P\{F_n^*(y)<F_n^*(z)\}$ ыктымалдыгы эмнеге барабар?

2.15. Эгерде тандалманын бөлүштүрүү функциясы үзгүлтүксүз болсо, анда бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясында өлчөмү $2/n$ болгон жок дегенде бир секириктин болушунун ыктымалдыгы эмнеге барабар?

2.16. $F(y)$ үзгүлтүксүз бөлүштүрүү функциясы менен берилген тандалма үчүн каалагандай $t\in[0,1]$ да

$$P\left\{\sup_y\left|F_n^*(y)-F(y)\right|>t\right\}=P\left\{\sup_{0\le y\le 1}\left|G_n^*(y)-y\right|>t\right\}$$

барабардыгы туура экендигин далилдегиле, мында $G_n^*(y)$ - бул $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы (бул касиет Колмогоров критерийин тургузууда колдонулат жана бул критерийдин параметрдик эместиги деп аталат).

2.17. F жалпы бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма үчүн каалагандай $t\in[0,1]$ да

$$P\left\{\sup_y\left|F_n^*(y)-F(y)\right|>t\right\}\le P\left\{\sup_{0\le y\le 1}\left|G_n^*(y)-y\right|>t\right\}$$

барабардыгы туура экендигин далилдегиле, мында $G_n^*(y)$ - $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы.

2.18. $X_1,\dots,X_n$ жана $Y_1,\dots,Y_n$ дер - бир эле үзгүлтүксүз бөлүштүрүүдөн алынган бирдей n көлөмдөгү көз карандысыз тандалмалар, ал эми F_n^* жана G_n^* дер - бул тандалмалар боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциялары болушсун. Анда каалагандай $t\in[0,1]$ үчүн

$$P\left\{\sup_y\left|F_n^*(y)-G_n^*(y)\right|>t\right\}=P\left\{\sup_{1\le k\le 2n}\left|S_k\right|<tn\middle|S_{2n}=0\right\}$$

барабардыгы туура экендигин далилдегиле, мында

$$S_k=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k,\quad P\{\xi_i=1\}=P\{\xi_i=-1\}=1/2$$

жана ξ_i кокустук кошулуучулары көз карандысыз.

2.19. $X_1,\dots,X_n$ - бүтүн сандар көптүгүндөгү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, $p_k=P\{X_1=k\}$ деп алалы. $\nu_k(n)$ менен тандалманын k га барабар болгон элементтеринин санын белгилейли. Анда

$$\sup_{A\subseteq Z}\left|P_n^*(A)-P\{X_1\in A\}\right|=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\nu_k(n)}{n}-p_k\right|$$

экендигин далилдегиле.

2.20. $X_1,\ldots,X_n$ - параметри $1/4$ болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, F_n^* - бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы жана $F(y)$ - тандалманын бөлүштүрүү функциясы болсун. Анда $n\to\infty$ да 1 ге барабар болгон ыктымалдык менен

$$\sup_{y\in R}\left|F_n^*(y)-F(y)\right|\to 0$$

жыйналуучулугу орундала тургандыгын далилдегиле.

2.21. $X_1,\ldots,X_n$ - параметри 1 болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Ар бир $n\geq 1$ үчүн ν_n деп тандалманын 2 ден ашпаган элементтеринин санын белгилейбиз. Анда $n\to\infty$ да $(\nu_n-c_n)/\sqrt{n}$ удаалаштыгы кандайдыр бир нормалдуу бөлүштүрүүгө алсыз жыйнала турган жок дегенде эки түрдүү c_n сандар удаалаштыгын көрсөткүлө. Бул нормалдуу бөлүштүрүүнүн параметрлерин тапкыла.

2.22. Каалаган фиксирленген $\lambda\in R$ үчүн тандалманын

$$\varphi_n^*(\lambda)=\int_R e^{i\lambda y}F_n^*(dy)$$

мүнөздүк функциясынын мааниси $n\to\infty$ да $\varphi(\lambda)=Ee^{i\lambda X_1}$ чыныгы мүнөздүк функциясынын маанисине жыйналышы мүмкүн экендигин далилдегиле.

2.23. Каалагандай $K\subset R$ компакты үчүн $n\to\infty$ да $\lambda\in K$ боюнча

$$\sup_{\lambda\in K}\left|\varphi_n^*(\lambda)-\varphi(\lambda)\right|\to 0$$

бир калыпта жыйналуучулугу мүмкүн экендигин далилдегиле.

2.24. F бөлүштүрүүсү бүтүн сандар торчосуна топтоштурулгун болсун. Анда $n\to\infty$ да $\lambda\in R$ боюнча

$$\sup_{\lambda\in R}\left|\varphi_n^*(\lambda)-\varphi(\lambda)\right|\to 0$$

бир калыпта жыйналуучулугу мүмкүн экендигин далилдегиле.

Экинчи бөлүм

Баалоону тургузуу методдору

§3. Моменттер методу

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр параметрдик жыйыны болсун, мында Θ - ченеми d болгон R^d евклиддик мейкиндигинин камтылуучу көптүгү. $X_1,...,X_n$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

θ параметри бир ченемдүү $(d=1)$ болгон учурда бул параметрдин баалоосу моменттер методунун жардамында төмөндөгүдөй тургузулат.

$$m(\theta) = E_\theta g(X_1) = \int_R g(y)F_\theta(dy)$$

функциясы үзгүлтүксүз жана монотондуу боло тургандай $g:R \to R$ сыналуучу функциясы тандалат.

$$m(\theta_n^*) = \overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

аткарыла тургандай $\theta_n^* \in \Theta$ баалоосу *моменттер методу боюнча баалоо* деп аталат. Моменттер методу боюнча тургузулган баалоо жалгыз эмес жана g сыналуучу функциясынын тандалышынан көз каранды. Көп учурда g катары $g(y) = y^k$ түрүндөгү функцияны тандашат; мында $m(\theta)$ - тандалма бөлүштүрүүсүнүн k-моменти.

θ параметри көп ченемдүү $(d \geq 2)$ болгон учурда бул параметрдин баалоосун моменттер методунун жардамында тургузуу үчүн $g_j : R \to R, j = 1,...,d$ функцияларынан d ны тандап алып жана

$$m_j(\theta) = E_\theta g_j(X_1)$$

функцияларын карайбыз. g_j сыналуучу функциялары d-ченемдүү параметрге салыштырмалуу

$$m_j(\theta) = z_j, j = 1,...,d$$

теңдемелер системасы бир маанилүү жана үзгүлтүксүз боло тургандай кылып тандалат.

$$m_j(\theta_n^*) = \overline{g_j(X)}, \ j = 1,...,d$$

аткарыла тургандай $\theta_n^* \in \Theta$ баалоосу *моменттер методу боюнча баалоо* деп аталат. g_j сыналуучу функциялары катары көп учурда даражалуу функциялар тандалат.

3.1. Параметрлери a жана σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Моменттер методун пайдаланып, төмөнкүлөрдүн баалоосун тургузгула

а) белгисиз a орточо маанисинин;

б) эгерде a орточо мааниси белгилүү болсо, белгисиз σ^2 дисперсиясынын;

в) (a,σ^2) эки ченемдүү параметринин.

Чыгаруу. а) $g(y)=y$ сыналуучу функциясын алабыз. Анда

$$m(a)=E_{a,\sigma^2}g(X_1)=E_{a,\sigma^2}X_1=a$$

барабардыгына ээ болобуз. Ошондуктан $m^{-1}(y)=y$ жана моменттер методунун изделүүчү a_n^* баалоосу $\overline{X}$ га барабар.

б) $g(y)=y^2$ сыналуучу функциясы үчүн

$$m(\sigma^2)=E_{a,\sigma^2}g(X_1)=E_{a,\sigma^2}X_1=\sigma^2+a^2$$

барабардыгы аткарылат. Ошондуктан $m^{-1}(y)=y-a^2$ жана моменттер методунун изделүүчү $(\sigma^2)_n^*$ баалоосу $\overline{X^2}-a^2$ га барабар.

в) $g_1(y)=y$ жана $g_2(y)=y^2$ сыналуучу функцияларын пайдаланып, төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$m_1(a,\sigma^2)=E_{a,\sigma^2}g_1(X_1)=E_{a,\sigma^2}X_1=a,$$

$$m_2(a,\sigma^2)=E_{a,\sigma^2}g_2(X_1)=E_{a,\sigma^2}X_1^2=a^2+\sigma^2.$$

Анда

$$\begin{cases} a_n^*=\overline{X} \\ (a_n^*)^2+(\sigma^2)_n^*=\overline{X^2} \end{cases}$$

системасын чыгарып, моменттер методунун изделүүчү баалоосуна ээ болобуз: $a_n^*=\overline{X}$ жана $(\sigma^2)_n^*=\overline{X^2}-(\overline{X})^2\equiv S^2$.

3.2. а) $g(y)=|y-a|$; б) $g(y)=(y-a)^2$

сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып, a орточо мааниси белгилүү болгон нормалдуу бөлүштүрүүнүн белгисиз $\sigma^2>0$ дисперсиясын баалагыла.

3.3. $g_1(y)=y$ жана $g_2(y)=y^2$ сыналуучу функцияларын пайдаланып, орточо мааниси θ жана дисперсиясы

а) 2θ; б) θ^2

болгон нормалдуу бөлүштүрүүнүн $\theta>0$ белгисиз параметрин баалагыла.

3.4. $y^{2k}, k=1,2,...$ сыналуучу функцияларын пайдаланып нөлдүк орточого ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүнүн белгисиз σ^2 дисперсиясын баалагыла.

3.5. Моменттер методун пайдаланып төмөнкү кесиндилердеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн θ параметрин баалагыла

а) $[0,\theta], \theta > 0;$ в) $[0,2\theta], \theta > 0;$

б) $[\theta-1,\theta+1], \theta \in R;$ г) $[-\theta,\theta], \theta > 0.$

3.6. $g_1(y) = y$ жана $g_2(y) = y^2$ сыналуучу функцияларын пайдаланып, төмөнкү кесиндилердеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн вектордук параметри (a,b) нын баалоосун тургузгула

а) $[a,b], a < b;$ б) $[a,a+b], b > 0.$

3.7. $g(y) = y^k, k = 1,2,...$ сыналуучу функцияларын пайдаланып $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн $\theta > 0$ параметрин баалагыла.

3.8. $g(y) = y$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн $\alpha > 0$ параметрин баалагыла.

3.9. $g(y) = y$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып тыгыздыгы

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta-y}, \ y \ge \beta \\ 0, \ y < \beta \end{cases}$$

болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн $\beta \in R$ жылышуу параметрин баалагыла.

3.10. Тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, \ y \ge \beta \\ 0, \ y < \beta \end{cases}$$

болгон эки параметрлүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүү берилсин. Моменттер методун пайдаланып, масштаб параметри $\alpha > 0$ ны жана жылышуу парметри $\beta \in R$ ны баалагыла.

3.11. $g(y) = y^k, k \in N$ сыналуучу функцияларын пайдаланып параметрлери

а) $\alpha;$ б) $1/\alpha$

болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча $\alpha > 0$ нын белгисиз маанисин баалагыла.

3.12. Туура келген $g(y)$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып Лаплас бөлүштүрүүсүнүн $\alpha > 0$ параметрин баалагыла.

3.13. Моменттер методун пайдаланып параметри $1/\sqrt{\alpha}$ болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча $\alpha > 0$ маанисин баалагыла.

3.14. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. $g(y)=y$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып, $\theta(\alpha)=P_\alpha\{X_1\ge 1\}$ параметрин баалагыла.

3.15. Параметлери $\alpha>0$ жана $\beta>0$ болгон Γ-бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Моменттер методун пайдаланып төмөнкү баалоолорду тургузгула:

а) эгерде β мааниси белгилүү болсо, α параметринин;

б) эгерде α мааниси белгилүү болсо, β параметринин;

в) (α,β) вектордук параметринин.

3.16. Параметлери β жана θ болгон Парето бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. Моменттер методун пайдаланып төмөнкү баалоолорду тургузгула:

а) эгерде $\theta>0$ мааниси белгилүү болсо, $\beta>1$ параметринин;

б) эгерде $\beta>1$ мааниси белгилүү болсо, $\theta>0$ параметринин;

в) (β,θ) вектордук параметринин, мында $\beta>2$ жана $\theta>0$.

3.17. Параметрлери $\alpha>1$ жана $\theta>0$ болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында α мааниси белгилүү. Анда $g(y)=y^\alpha$ сыналуучу функциясынын жардамында θ параметринин баалоосун тургузгула.

3.18. Параметрлери $\alpha>0$ жана 1 болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. Анда $g(y)=y$ сыналуучу функциясынын жардамында α параметринин баалоосун тургузуу мүмкүн эместигин көрсөткүлө.

3.19. Тыгыздыгы

$$f_\alpha(y)=\begin{cases}3y^2\alpha^{-3}e^{-(y/\alpha)^3}, \ y\ge 0\\ 0, \ y<0\end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. $g(y)=y^k$ сыналуучу функциясынын жардамында $\alpha>0$ параметринин баалоосун тургузгула.

3.20. Эгерде тандалма бөлүштүрүүсү

а) $y\in[0,1]$ болгондо $\theta y^{\theta-1}$; б) $y\in[0,\theta]$ болгондо $2y/\theta^2$

тыгыздыктарына ээ болсо, анда $g(y)=y$ сыналуучу функциясын пайдаланып $\theta>0$ параметринин баалоосун тургузгула.

3.21. $y, y^2, y^3, \ldots$ сыналуучу функцияларынын биринин жардамында моменттер методу боюнча Коши бөлүштүрүүсүнүн жылышуу параметри үчүн баалоону тургузууга мүмкүнбү?

3.22. $g(y)=y$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып Бернулли бөлүштүрүүсүнүн p параметрин баалагыла.

3.23. Кандайдыр бир $g(y)$ сыналуучу функциясынын жардамында моменттер методу боюнча Бернулли бөлүштүрүүсүнүн p параметринин $\overline{X}$ тен айырмалуу баалоосун алууга мүмкүнбү?

3.24. Параметрлери m жана p болгон биномиалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Моменттер методун пайдаланып төмөнкү баалоолорду тургузгула

а) эгерде m мааниси белгилүү болсо, p параметринин;

б) эгерде p мааниси белгилүү болсо, m параметринин;

в) (m,p) вектордук параметринин.

3.25. Параметрлери 2 жана p болгон биномиалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. $g(y)=y$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып $\theta=e^{2p}$ параметри үчүн баалоону тапкыла.

3.26. а) $g(y)=y$ б) $g(y)=y^2$ сыналуучу функцияларын пайдаланып, Пуассон бөлүштүрүүсүнүн $\lambda>0$ параметрин баалагыла.

3.27. Моменттер методун пайдаланып, параметри $\ln\lambda$ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма боюнча $\lambda>1$ маанисин баалагыла.

3.28. Параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. $g(y)=I\{y=1\}$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып $\theta=\theta(\lambda)=\lambda e^{-\lambda}$ параметрин баалагыла.

3.29. Моменттер методун пайдаланып геометриялык бөлүштүрүүнүн $p\in[0,1]$ параметрин баалагыла.

3.30. P жана Q - математикалык күтүүлөрү a жана b, $a<b$, белгилүү болгон эки бөлүштүрүү болсун. Ал эми P_θ бул P жана Q бөлүштүрүүлөрүнүн аралашмасы болсун:

$$P_\theta=\theta P+(1-\theta)Q,\ 0\le\theta\le1.$$

Анда моменттер методун пайдаланып, P_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма боюнча θ параметрин баалагыла.

3.31. $g(y)=y$ сыналуучу функциялуу моменттер методун пайдаланып баалоо тургузууга мүмкүн болбогон мисал келтиргиле.

§4. Чындыкка жакындыктын максималдуу методу

$\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. R деги кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу доминирлөө шарты аткарылсын. F_θ

бөлүштүрүүсүнүн μ ченемиңе салыштырмалуу тыгыздыгын f_θ деп белгилейбиз:

$$f_\theta(y) = \frac{dF_\theta}{d\mu}(y).$$

$X_1,...,X_n$ - бул F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

$$f_\theta(X_1,...,X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$$

функциясы *чындыкка жакындык функциясы* деп аталат.

Эгерде θ_n^* чекитинде чындыкка жакындык функциясы максимумга жетишсе, анда θ параметринин $\theta_n^* = \theta_n^*(X_1,...,X_n)$ баалоосу *максималдуу чындыкка жакындык баалоосу* деп аталат.

Максималдуу чындыкка жакындык баалоосун табууда көп учурда *чындыкка жакындыктын логарифмалык функциясы*

$$L_\theta(X_1,...,X_n) = \ln f_\theta(X_1,...,X_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(X_i)$$

га өтүү ыңгайлуу. L функциясы да максимумга θ_n^* чекитинде ээ болоору белгилүү.

4.1. Нормалдуу бөлүштүрүүнүн (a,σ^2) вектордук параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

Чыгаруу. Чындыкка жакындыктын логарифмалык функциясы

$$L_{a,\sigma^2}(X_1,...,X_n) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$$

ге барабар. L функциясы да максимумга ээ болуучу чекитти төмөнкү теңдемелер системасынан табабыз:

$$\frac{\partial L_{a,\sigma^2}(X_1,...,X_n)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial L_{a,\sigma^2}(X_1,...,X_n)}{\partial(\sigma^2)} = 0$$, б.а.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) = 0, \quad -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = 0.$$

Бул системанын чечими $a_n^* = \overline{X}$ жана $(\sigma^2)_n^* = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$.

4.2. Эгерде a орточо мааниси белгилүү болсо, анда нормалдуу бөлүштүрүүнүн σ^2 дисперсиясынын максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.3. Эгерде тандалманын бөлүштүрүүсү θ орточолуу жана

а) 2θ; б) θ^2

дисперсиялуу нормалдуу тыгыздыкка ээ болсо, анда $\theta > 0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

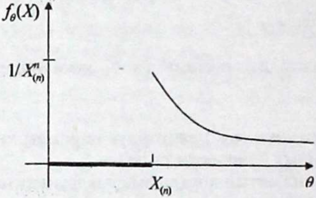
4.4. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн $\theta > 0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

Чыгаруу. Тандалманын чындыкка окшоштук функциясы төмөнкүгө барабар:

$$f_\theta(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} \theta^{-n}, \text{ эгерде бардык } X_j \in [0,\theta], \\ 0, \text{ эгерде жок дегенде бир } X_j \notin [0,\theta] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \theta^{-n}, \text{ эгерде } X_{(n)} \le \theta, \\ 0, \text{ эгерде } X_{(n)} > \theta. \end{cases}$$

Тандалманын бекемделген маанилеринде (ошондой эле $X_{(n)}$ дин бекемделген маанилери үчүн) $f_\theta(X_1,\ldots,X_n)$ дин θ дан көз карандылыгы төмөнкү көрүнүшкө ээ болот



Чындыкка жакындык функциясы максимумга $\theta = X_{(n)}$ чекитинде жетишет. Ошондуктан изделүүчү чындыкка жакындык баалоосу $\theta_n^* = X_{(n)}$ ге барабар.

4.5. а) $[-\theta,0], \theta > 0$; в) $[\theta,\theta+2], \theta \in R$;
б) $[-\theta,\theta], \theta > 0$; г) $[\theta,2\theta], \theta > 0$
кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн θ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.6. $[a,b]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүү үчүн эки ченемдүү (a,b) параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.7. Көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн α параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.8. Тыгыздыгы

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y}, \; y \ge \beta \\ 0, \; y < \beta \end{cases}$$

болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн $\beta \in R$ жылышуу параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.9. $X_1,\ldots,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y)=\begin{cases}\alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha y}, & y\geq\beta\\ 0, & y<\beta\end{cases}, \quad \alpha>0, \beta\in R$$

болгон эки параметрлүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Эки ченемдүү (α,β) параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.10. Тыгыздыгы

$$f_\mu(y)=e^{-|y-\mu|}/2$$

болгон Лапластын бөлүштүрүүсүнүн $\mu \in R$ жылышуу параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.11. Тыгыздыгы

$$f_{\mu,\sigma}(y)=e^{-|y-\mu|/\sigma}/2\sigma, \quad \mu\in R, \sigma>0$$

болгон эки параметрлүү Лапластын бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. Эки ченемдүү (μ,σ) параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.12. Эгерде β мааниси белгилүү болсо, Γ - бөлүштүрүүсү үчүн $\alpha>0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.13. Параметрлери $\beta>0$ жана $\theta>0$ болгон Парето бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. Төмөндөгүлөрдүн максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла:

а) эгерде θ мааниси белгилүү болсо, β параметринин;

б) эгерде β мааниси белгилүү болсо, θ параметринин;

в) (β,θ) вектордук параметринин.

4.14. Параметрлери α жана θ болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. Эгерде $\alpha>1$ мааниси белгилүү болсо, $\theta>0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тургузгула.

4.15. Тыгыздыгы

$$f_\alpha(y)=\begin{cases}3y^2\alpha^{-3}e^{-(y/\alpha)^3}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүнүн $\alpha>0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тургузгула.

4.16. Кэптейн бөлүштүрүүсү

$$f_\theta(y)=\frac{g'(y)}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\theta-g(y))^2/2}$$

тыгыздыгы менен аныкталат, мында $g(y)$ - кемибөөчү дифференцирленүүчү функция. θ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.17. Эгерде тандалма бөлүштүрүүсү төмөнкүдүй тыгыздыкка ээ болсо, анда $\theta > 0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла:

а) $y \in [0,1]$ болгондо $\theta y^{\theta-1}$;

б) $y \in [0,\theta]$ болгондо $2y/\theta^2$;

в) $y \geq 0$ болгондо $\theta e^{-\theta^2/2y}/\sqrt{2\pi y^3}$;

г) $y \in [1,e]$ болгондо $\theta(\ln^{\theta-1} y)/y$;

д) $|y| \leq \theta$ болгондо $e^{-|y|}/2(1-e^{-\theta})$.

4.18. θ жылышуу параметрлүү Коши бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин.

а) көлөмү 1 ге; б) көлөмү 2 ге

барабар тандалма боюнча $\theta > 0$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.19. Бернулли бөлүштүрүүсүнүн p параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

Чыгаруу. Бернулли бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгы $\{0,1\}$ көптүгүндөгү эсептөө ченемине салыштырмалуу төмөнкүгө барабар:

$$f_p(y) = p^y(1-p)^{1-y}.$$

Ошондуктан чындыкка жакындыктын логарифмикалык функциясы

$$L_p(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i \ln p + (n - \sum_{i=1}^{n} X_i)\ln(1-p)$$

ге барабар. Анда L функциясы максимумга ээ болуучу чекитти төмөнкү теңдемелер системасынан табабыз:

$$\frac{\partial L_p(X_1,\dots,X_n)}{\partial p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}(n - \sum_{i=1}^{n} X_i) = 0 \quad .$$

Бул системанын чечими $p_n^* = \overline{X}$.

4.20. Параметрлери $p \in (0,1)$ жана m болгон биномиалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Төмөнкү параметрдин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла:

а) эгерде m мааниси белгилүү болсо, p нын;

б) эгерде p мааниси белгилүү болсо, көлөмү $n = 1$ болгон тандалма боюнча m дин.

4.21. Пуассон бөлүштүрүүсүнүн $\lambda > 0$ параметринин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.22. Геометриялык бөлүштүрүүнүн $p \in (0,1)$ параметринин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.23. $X_1,...,X_n$ - $p \in (0,1)$ параметрлүү геометриялык бөлүштүрүүдөн берилген m деңгээлинде кесилип алынган тандалма болсун:

$$P\{X_1 = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0,...,m-1,$$

$$P\{X_1 = m\} = 1 - P\{X_1 \le m-1\} = (1-p)^m.$$

p үчүн чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.24. $\{1,...,\theta\}$ көптүгүндөгү бир калыптагы бөлүштүрүүнүн θ параметринин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла, мында θ - оң бүтүн параметр.

4.25. a орточосуна жана бирдик дисперсиясына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында a эки маани: 1 жана 2 ни гана кабыл ала алат. a параметринин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

Чыгаруу. $\Theta = \{1,2\}$ көптүгү эки чекиттүү болгондуктан, эгерде $f_1(X_1,...,X_n) > f_2(X_1,...,X_n)$ болсо, анда чындыкка жакындыктын $a_n^*(X_1,...,X_n)$ баалоосу 1 деген маанини кабал алат. Бул болсо төмөнкү барабарсыздыкка эквиваленттүү:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\sum (X_i-1)^2} > \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\sum (X_i-2)^2}.$$

Акыркы барабарсыздыкты чыгарып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$a_n^* = \begin{cases} 1, \textit{ эгерде } \overline{X} < 3/2, \\ 2, \textit{ эгерде } \overline{X} \ge 3/2. \end{cases}$$

4.26. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында α 1, 2 жана 3 деген маанилерди гана кабыл алат. α параметринин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.27. $X_1,...,X_n$ - бул $\theta \in (0,1/3)$ параметринен көз каранды болгон төмөнкүдөй үч чекиттүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун:

$$P_\theta\{X_1 = 1\} = \theta,\ P_\theta\{X_1 = 2\} = 2\theta,\ P_\theta\{X_1 = 3\} = 1 - 3\theta.$$

θ параметринин чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.28. Тандалма бөлүштүрүүсү $f_\theta(y) = f(y-\theta)$ тыгыздыгына ээ болсун, мында $f(y)$ функциясы $y=0$ чекитинде жалгыз максимумга ээ. X_1 бир байкоосу боюнча θ жылышуу параметринин θ_1^* чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

4.29. Мурдагы мисалдын шартында $|y|$ тин өсүшү менен $f(y)$ функциясы кемисин. n көлөмдүү тандалма боюнча тургузулган θ_n^*

чындыкка жакындык баалоосу $[X_{(1)}, X_{(n)}]$ интервалында жатаарын далилдегиле.

4.30. Чындыкка жакындык баалоосу жалгыз болбогон параметрдик бөлүштүрүү жыйынына мисал келтиргиле.

4.31. Чындыкка жакындык баалоосу моменттер методу боюнча $g(y) = y$ функциясынын жардамында алынган баалоо менен дал келбеген мисал келтиргиле.

§5. Байестик баалоолор

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. R деги кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу доминирлөө шарты аткарылсын, б.а. бул параметрдик жыйын μ га салыштырмалуу абсолюттук үзгүлтүксүз бөлүштүрүүлөрдөн турсун. f_θ деп, μ га салыштырмалуу F_θ бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгын белгилейбиз.

θ параметри кандайдыр бир λ ченемине салыштырмалуу тыгыздыгы $q(t)$ болгон кокустук чоңдук болсун. $f(t, x_1, ..., x_n) = f_t(x_1, ..., x_n) q(t)$ функциясы $R^n \times \Theta$ ги кандайдыр бир бөлүштүрүүнүн $\mu^n \times \lambda$ га салыштырмалуу тыгыздыгы болуп саналат.

$$\theta_n^* = \int_\Theta t q(t \mid X_1, ..., X_n) \lambda(dt)$$

баалоосу $X_1, ..., X_n$ тандалмасы боюнча θ параметринин *Байестик баалоосу* деп аталат, мында θ параметринин *апостериардык тыгыздыгы* $q(t \mid x_1, ..., x_n)$ төмөнкү формула боюнча эсептелет:

$$q(t \mid x_1, ..., x_n) = \frac{f_t(x_1, ..., x_n) q(t)}{\int_\Theta f_s(x_1, ..., x_n) q(s) \lambda(ds)}.$$

5.1. a орточосуна жана бирдик дисперсиясына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында a параметри нөлдүк орточолуу жана σ^2 белгилүү дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. a параметринин байестик баалоосун тургузгула.

Чыгаруу.

$$q(t) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-t^2/2\sigma^2},$$

$$f_t(x_1, ..., x_n) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - t)^2/2}$$

болгондуктан, $q(t \mid x_1,...,x_n)$ тыгыздыгы (t дан функция катары) $q(t)f_t(x_1,...,x_n)$ көбөйтүндүсүнө же

$$q(t)f_t(x_1,...,x_n) = e^{-t^2/2\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-t)^2/2} = e^{-t^2(1/\sigma^2+n)/2+\bar{x}nt-n\overline{x^2}/2}$$

ге пропорционалдуу.

$$-\frac{t^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2}+n)+\overline{X}nt = -\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}+n)(t-\frac{\overline{X}n}{1/\sigma^2+n})^2+\frac{(\overline{X}n)^2}{2(1/\sigma^2+n)}$$

барабардыгынан $q(t \mid x_1,...,x_n)$ тыгыздыгынын $\frac{\overline{X}n\sigma^2}{1+n\sigma^2}$ орточолуу жана $\frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}$ дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүгө тиешелеш экендиги келип чыгат. Ошондуктан изделүүчү баалоо

$$a_n^* = \int_{\Theta} tq(t \mid X_1,...,X_n)dt = \frac{\overline{X}n\sigma^2}{1+n\sigma^2}$$

көрүнүшүндө болот.

5.2. a орточосуна жана бирдик дисперсиясына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында a параметри b белгилүү орточолуу жана σ^2 белгилүү дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. a параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.3. a орточосуна жана бирдик дисперсиясына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында a параметри $1/2$ параметрлүү Бернулли бөлүштүрүүсүнө ээ. a параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.4. Эгерде θ параметри

а) $t \geq 1$ болгондо $q(t)=1/t^2$ тыгыздыгына;

б) $[0,1]$ кесиндисинде бир калыптагы бөлүштүрүүгө ээ болсо, анда $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн θ параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.5. $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында θ нын 1 жана 2 маанилерин кабыл алуу ыктымалдыктары бирдей. θ параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.6. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында α параметри β болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ. α параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.7. Тыгыздыгы

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta-y}, \; y \geq \beta \\ 0, \; y < \beta \end{cases}$$

болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында β параметри $[0,1]$ кесиндисинде бир калыпта бөлүштүрүлгөн. β параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.8. Эгерде θ параметри

а) $[0,1]$ кесиндисинде бир калыптагы бөлүштүрүүгө;

б) $[0,1]$ кесиндисинде $3\theta^2$ тыгыздыгына;

в) $\beta > 0$ мааниси белгилүү болгон β жана 1 параметрлүү Парето бөлүштүрүүсүнө ээ болсо, анда $[0,\theta]$ кесиндисиндеги $2y/\theta^2$ тыгыздыктуу бөлүштүрүүнүн θ параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.9. Параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында p параметри $[0,1]$ кесиндисинде бир калыпта бөлүштүрүлгөн. p параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.10. Параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында p параметри $1/2$ жана $1/3$ маанилерин бирдей ыктымалдыкта кабыл алат. p параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.11. Параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында p параметри $[0,1]$ кесиндисинде $q(t) = \lambda t^{\lambda-1}$ тыгыздыгына ээ, $\lambda > 0$ мааниси белгилүү. p параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.12. Параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында λ параметри 1 болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ. λ параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.13. Параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында λ параметри 1 жана 2 маанилерин тиешелеш түрдө $1/3$ жана $2/3$ ыктымалдыктары менен кабыл алат. λ параметринин байестик баалоосун тургузгула.

5.14. Параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин, мында p параметри $\{1/4, 1/2, 3/4\}$ көптүгүндө бир калыпта бөлүштүрүлгөн. p параметринин байестик баалоосун тургузгула.

Үчүнчү бөлүм
Баалоолор касиеттери

§6. Жылышпастык жана абалдуулук

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. $X_1, X_2, \ldots$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, ал эми $\theta_n^* = \theta_n^*(X_1, \ldots, X_n)$ - θ параметринин тандалма боюнча тургузулган кандайдыр баалоосу болсун.

Эгерде каалагандай $\theta \in \Theta$ үчүн $n \to \infty$ да θ_n^* чоңдугу θ га жыйналышы ыктымал болсо, анда θ_n^* баалоосу *θ параметринин абалдуу баалоосу* деп аталат.

Эгерде каалагандай $\theta \in \Theta$ үчүн $n \to \infty$ да θ_n^* чоңдугу θ га жыйналышы мүмкүн болсо, анда θ_n^* баалоосу *θ параметринин күчтүү абалдуу баалоосу* деп аталат.

$b_n(\theta) = E_\theta \theta_n^* - \theta$ чоңдугу θ_n^* баалоосунун *жылышуусу* деп аталат. Эгерде каалагандай $\theta \in \Theta$ үчүн $b_n(\theta) = 0$ болсо, анда θ_n^* баалоосу *θ параметринин жылышпас баалоосу* деп аталат.

6.1. $[0, \theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн θ параметринин $X_{(n)}$ баалоосунун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле.

Чыгаруу. $y \in [0, \theta]$ үчүн $X_{(n)}$ чоңдугунун бөлүштүрүү тыгыздыгы ny^{n-1}/θ^n ге барабар. Ошондуктан

$$EX_{(n)} = \int_0^\theta y \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Анда $X_{(n)}$ баалоосунун жылышуусу $\theta/(n+1)$ ге барабар жана ал жылышуучу, бирок асимптотикалык жылышпас болуп саналат. Абалдуулугун текшеребиз: каалагандай фиксирленген $\varepsilon \in (0, \theta)$ үчүн $n \to \infty$ да

$$P\{|\theta - X_{(n)}| \ge \varepsilon\} = P\{X_{(n)} \le \theta - \varepsilon\} = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right) \to 0 .$$

Анда $X_{(n)}$ баалоосу абалдуу. Мындан сырткары, ал күчтүү абалдуу, себеби $X_{(n)}$ кокустук чоңдуктарынын удаалаштыгы 1 ге барабар ыктымалдык менен кемибейт.

6.2. $X_1, \ldots, X_n$ - $[0, \theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметринин төмөндөгү баалоолорунун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле:

а) $2\overline{X}$;

б) $\overline{X} + X_{(n)}/2$;

в) $(n+1)X_{(1)}$;

г) $X_{(1)} + X_{(n)}$;

д) $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

6.3. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Чебышев барабарсыздыгынын жардамында θ параметринин төмөндөгү баалоолорунун абалдуулугун далилдегиле:

а) $2\overline{X}$;

б) $X_{(n)}$.

6.4. $X_1,...,X_n$ - $[a,b]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $\theta_n^* = X_{(n)} - X_{(1)}$ баалоосу кесинди узундугу $b-a$ нын жылышпас баалоосу болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.5. $X_1,...,X_n$ - $[-\theta,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда θ параметринин чындыкка жакындык баалоосу анын жылышпас баалоосу болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.6. $X_1,...,X_n$ - $[-3\theta,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $\theta_n^* = 4X_{(n)} + X_{(1)}$ баалоосу θ параметринин жылышпас баалоосу болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.7. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда моменттер методунун $\theta_{k,n}^* = \sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}}$ баалоосу

а) каалаган $k \geq 1$ үчүн θ нын күчтүү абалдуу баалоосу болоорун;

б) каалаган $k \geq 2$ үчүн θ нын жылышпас баалоосу болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. б) $\theta = \sqrt[k]{(k+1)E_\theta \overline{X^k}}$ экендигин белгилеп кетебиз. $y \geq 0$ областында $k \geq 2$ үчүн $g(y) = -\sqrt[k]{(k+1)y}$ функциясы тапатак томпок болгондуктан, Йенсен барабарсыздыгы боюнча

$$E_\theta \theta_{k,n}^* = -E_\theta g(\overline{X^k}) < -g(E_\theta \overline{X^k}) = \theta,$$

себеби $\overline{X^k}$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүсү кубулбаган.

6.8. $X_1,...,X_n$ - чектүү математикалык күтүүгө ээ болгон кандайдыр бир бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда

$m_1 = EX_1$ параметри үчүн $\overline{X}$ -тин жылышпас жана абалдуу (күчтүү абалдуу) баалоосу болоорун далилдегиле.

6.9. $X_1,...,X_n$ - чектүү k-тартиптеги $m_k = EX_1^k$ моментке ээ болгон кандайдыр бир бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда k-тартиптеги $\overline{X^k}$ тандалма моменти m_k параметринин жылышпас жана абалдуу (күчтүү абалдуу) баалоосу болобу?

6.10. $X_1,...,X_n$ - чектүү дисперсияга ээ болгон кандайдыр бир бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

статистикасы $\sigma^2 = DX_1$ параметринин абалдуу (күчтүү абалдуу) баалоосу болобу? S^2 чындыгы σ^2 дисперсиясынын жылышпас баалоосу болобу? Бир убакта күчтүү абалдуу жана жылышпас абал болгон σ^2 параметринин баалоосун тургузгула.

6.11. $X_1,...,X_n$ - чектүү экинчи моментке ээ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма жана $a = EX_1$ мааниси белгилүү болсун. Белгисиз дисперсиянын төмөнкү баалоолорун жылышпастыкка жана абалдуулукка текшергиле:

а) $\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$; в) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$;

б) $\overline{X^2} - a^2$; г) $\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$.

6.12. $X_1,...,X_n$ - белгилүү a орточо маанисине белгисиз σ^2 дисперсиясына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $\sigma_n^* = \sqrt{\pi/2}\cdot\overline{|X-a|}$ баалоосу белгисиз σ параметринин жылышпас жана абалдуу баалоосу болоорун текшергиле.

6.13. $X_1,...,X_n$ - чектүү экинчи моментке ээ болгон кандайдыр бир бөлүштүрүүдөн алынган $2n$ көлөмдүү тандалма болсун. Анда σ^2 дисперсиясынын

$$(\sigma^2)_n^* = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - X_{2i-1})^2$$

баалоосунун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле.

6.14. $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$ - (ξ,η) кокустук векторуна тиешелеш келүүчү тандалма, б.а. $P\{X_1 < x, Y_1 < y\} = P\{\xi < x, \eta < y\}$ болсун. Анда $Cov(\xi,\eta)$ үчүн

$$m_{1,1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

чоңдугу жылышпас жана абалдуу баалоо болоорун текшергиле.

6.15. Систематикалык каталыкка ээ болбогон бирдей эле чоңдуктагы прибордун жардамында 8 жолку көз карандысыз ченөөлөрдүн жыйынтыктары берилген: $369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383\,м$. Эгерде чыныгы узундугу төмөнкүдөй болсо, анда ченөөлөр каталыгынын дисперсиясынын жылышпас баалоосун аныктагыла:

а) белгилүү жана $375\,м$; б) белгисиз.

6.16. Тегеректин белгисиз d диаметрин ченөө үчүн n жолу сыноо жүргүзүлөт. Биринчи жакындашууда $X_i = d + \xi_i$ ченөөсү нөлдүк орточолуу жана белгисиз σ^2 дисперсиялуу бирдей нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болгон ξ_i көз карандысыз кокустук каталыктарда жүргүзүлөт. Тегеректин аянтынын

$$s^* = \frac{\pi}{4}((\overline{X})^2 - S_0^2 / n)$$

баалоосунун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле.

6.17. Квадраттын диоганалынын узундугу a ны ченөө үчүн n жолу сыноо жүргүзүлөт. Биринчи жакындашууда $X_i = a + \xi_i$ ченөөсү нөлдүк орточолуу жана белгисиз σ^2 дисперсиялуу бирдей нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болгон ξ_i көз карандысыз кокустук каталыктарда жүргүзүлөт. Квадраттын аянтынын

$$s^* = ((\overline{X})^2 - S_0^2 / n)/2$$

баалоосунун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле.

6.18. $X_1, \ldots, X_{3n}$ - a орточосуна жана бирдик дисперсиясына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган $3n$ көлөмдүү тандалма болсун. a параметринин төмөндөгү баалоолорунун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле:

а) $\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} X_i$; б) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{3i}$.

6.19. $X_1, \ldots, X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\alpha_n^* = 1/\overline{X}$ баалоосу жылышпас болобу? Эгерде болбосо, анда жылышууну тапкыла. Бул баалоо абалдуу болобу?

6.20. $X_1, \ldots, X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\theta = \theta(\alpha)$ параметри үчүн $\theta_n^* = e^{\overline{X}}$ статистикасы абалдуу баалоо болобу? Ошол эле параметр үчүн θ_n^* жылышпас баалоо болобу?

6.21. $X_1,...,X_n$ - параметри $1/\sqrt{\alpha}$ болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\alpha_n^* = (\overline{X})^2$ баалоосу α параметринин жылышпас баалоосу болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.22. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Моменттер методунун баалоолору

$$\alpha_k^* = \sqrt[k]{k!/\overline{X^k}},\ k = 1,2,...$$

ды жылышпастыкка текшергиле. Бул баалоолор абалдуу болушабы?

6.23. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y}, \textit{ эгерде } y \geq \beta \\ 0, \textit{ эгерде } y < \beta \end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда жылышуу параметри β нын төмөндөгү баалоолору жылышпас жана абалдуу болоорун аныктагыла:

а) $X_{(1)}$; б) $\overline{X} - 1$.

6.24. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1} e^{-(y-\beta)/\alpha}, \textit{ эгерде } y \geq \beta \\ 0, \textit{ эгерде } y < \beta \end{cases}$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда моменттер методу жана максималдык чындыкка жакындык методу менен тургузулган масштаб параметри $\alpha > 0$ нын жана жылышуу параметри $\beta \in R$ нын баалоолорунун абалдуулугун текшергиле.

6.25. Парето бөлүштүрүүсүнүн $\beta > 2$ жана $\theta > 0$ параметрлеринин моменттер методундагы

$$\beta_n^* = 1 + \sqrt{1 + \overline{X}^2 / S^2} \text{ жана } \theta_n^* = \overline{X}(1 - 1/\beta^*)$$

баалоолорунун абалдуулугун текшергиле.

6.26. Парето бөлүштүрүүсүнүн β жана θ параметрлеринин максималдык чындыкка жакындык баалоолору $\beta_n^* = 1/(\overline{\ln X} - \ln X_{(1)})$ жана $\theta_n^* = X_{(1)},\ n \geq 2,$ нын жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле.

Чыгаруу. $\ln X_1$ чоңдугу

$$f(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta(y - \ln\theta)}, \textit{ эгерде } y \geq \ln\theta \\ 0, \textit{ эгерде } y < \ln\theta \end{cases}$$

тыгыздыктуу эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ экендигин белгилеп өтөбүз. Ошондуктан $\overline{\ln X} - \ln X_{(1)}$ статистикасы да

$\overline{Y}-Y_{(1)}$ сыяктуу эле бөлүштүрүлгөн, мында Y_i параметри β болгон көрстөкүчтүү бөлүштүрүүгө ээ. 1.24-мисалдын жыйынтыгын пайдаланып, $n\overline{Y}-nY_{(1)}$ дин бөлүштүрүүсүн табабыз. $Y_{(k+1)}-Y_{(k)}$ чоңдугу параметри $(n-k)/\beta$ болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ, ошондуктан $\xi_k=(n-k)(Y_{(k+1)}-Y_{(k)})$ параметри β болгон көрстөкүчтүү бөлүштүрүүгө ээ болот жана k нын түрдүү маанилеринде бул чоңдуктар көз карандысыз. $\sum_{i=1}^{n} Y_i=\sum_{i=1}^{n} Y_{(i)}$ болгондуктан,

$$n\overline{Y}-nY_{(1)}=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(Y_{(k+1)}-Y_{(k)})=\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k.$$

$(n-1)(\xi_1+\ldots+\xi_{n-1})$ чоңдугунун жылышуусу 6.19-мисалда эсептелген жана $\beta/(n-2)$ ге барабар. Ошондуктан β_n^* баалоосунун жылышуусу $2\alpha/(n-2)$ ге барабар болот.

6.27. Параметрлери α жана θ болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин, мында α параметринин мааниси белгилүү. θ параметринин $1/\overline{X^{\alpha}}$ баалоосун жылышпастыкка жана абалдуулукка текшергиле.

6.28. $\overline{X}$ статистикасы Коши бөлүштүрүүсүнүн жылышуу параметри θ нын абалдуу баалоосу болобу?

6.29. n буюмдан турган партиядан m жараксызы табылган. Жараксыз буюмдун келип чыгуусунун белгисиз p ыктымалдыгы m/n чоңдугу менен бааланат. Бул баалоонун жылышпастыгын жана абалдуулугун текшергиле.

6.30. $X_1,\ldots,X_n$ - параметри $\sqrt{p}$ болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $p_n^*=(\overline{X})^2$ статистикасы p параметринин жылышпас баалоосу болоб алабы? Абалдуу баалоосучу?

6.31. $X_1,\ldots,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $\tau(p)=1/p$ параметри үчүн жылышпас баалоонун жок экендигин көрсөткүлө.

6.32. $X_1,\ldots,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда X_n, $X_1(1-X_n)$ жана X_1X_n статистикаларынын тиешелеш түрдө p, $p(1-p)$ жана p^2 дар үчүн жылышпас баалоолор болоорун текшергиле. Бул баалоолор абалдуу болушабы?

6.33. $X_1,\ldots,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

$$p_n^* = \frac{n\overline{X} + \alpha}{n + \beta}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

көрүнүшүндөгү баалоолор классын карайбыз. p_n^* баалоолорунун жылышуусун жана орточо квадраттык каталыгын тапкыла. $\alpha = \sqrt{n}/2$ жана $\beta = \sqrt{n}$ болгондо каталыктын p дан көз каранды эместигин көрсөткүлө.

6.34. $X_1,...,X_n$ - параметрлери 2 жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(p)$ параметри үчүн $\theta_n^* = e^{\overline{X}}$ статистикасы абалдуу баалоо болот? Ушул эле параметр үчүн θ_n^* жылышпас баалоо болобу?

6.35. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $(X_1 + X_n)/2, \overline{I\{X = k\}}$ жана X_n статистикалары тиешелеш түрдө $\lambda, \lambda^k e^{-\lambda}/k!$ жана λ лар үчүн жылышпас баалоолор болоорун текшергиле. Бул баалоолор абалдуу болушабы?

6.36. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган $n \geq 5$ көлөмдүү тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(\lambda)$ параметри үчүн $\theta_n^* = X_1 \cdot ... \cdot X_5$ статистикасы жылышпас баалоо болот? Ошол эле θ параметри үчүн θ_n^* абалдуу баалоо болобу?

6.37. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(\lambda)$ параметри үчүн $\theta_n^* = \overline{X}e^{-\overline{X}}$ статистикасы абалдуу баалоо болот? Ошол эле θ параметри үчүн θ_n^* жылышпас баалоо болобу?

Чыгаруу. λ параметри үчүн $\overline{X}$ абалдуу баалоо болгондуктан, $n \to \infty$ да $\theta_n^* = \overline{X}e^{-\overline{X}}$ чоңдугу $\theta(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$ га умтулушу ыктымал. $n\overline{X}$ кокустук чоңдугу $n\lambda$ параметрлүү Пуассондук бөлүштүрүүгө ээ, ошондуктан

$$E\theta_n^* = E\overline{X}e^{-\overline{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} e^{-k/n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$$

$$= \frac{e^{-n\lambda}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\lambda e^{-1/n})^k}{(k-1)!} = \lambda e^{n\lambda(e^{-1/n}-1)-1/n},$$

б.а. θ_n^* баалоосу $\theta = \theta(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$ параметри үчүн жылуучу (бирок, асимптотикалык жылышпас) баалоо болот.

6.38. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(\lambda)$ параметри үчүн

$\theta_n^* = \overline{I\{X=1\}}$ статистикасы абалдуу баалоо болот? Ошол эле θ параметри үчүн θ_n^* жылышпас баалоо болобу?

6.39. $X_1,...,X_n$ - параметри $\ln\lambda$ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. λ параметри үчүн $\lambda_n^* = e^{\overline{X}}$ баалоосу жылышпас баалоо болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.40. Төмөн жагынан Пуассон бөлүштүрүүсү менен кесилген бир X_1 байкоосу бар:

$$P\{X_1 = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}},\ k \geq 1.$$

Анда $\theta = 1 - e^{-\lambda}$ параметринин жалгыз жылышпас баалоосу

$$\theta_1^* = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } X_1 \text{ так} \\ 2, & \text{эгерде } X_1 \text{ жуп} \end{cases}$$

көрүнүшүндө болоорун далилдегиле.

6.41. Пуассон бөлүштүрүүсүнүн λ параметринин бир эле убакта

а) абалдуу жана жылышуучу а) абалсыз жана жылышпас болгон баалоосун тургузгула.

6.42. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда $\tau(\lambda) = 1/\lambda$ параметри үчүн жылышпас баалоолор жок экендигин көрсөткүлө.

6.43. $X_1,...,X_n$ - чектүү $\{1,...,\theta\}$ көптүгүндөгү бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында θ-оң бүтүн параметр. θ параметринин чындыкка жакындык баалоосун жылышпастыкка жана абалдуулукка текшергиле.

6.44. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $p_n^* = 1/(1+\overline{X})$ баалоосу жылышпас баалоо болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.45. $P_q, q \in (0,1/2)$ бөлүштүрүүсүнөн төмөнкүдөй тандалма берилсин:

$$P_q\{X_1 = k\} = \begin{cases} q^5, & \text{эгерде } k=1 \\ 1-q-q^5, & \text{эгерде } k=2 \\ q, & \text{эгерде } k=3 \end{cases}$$

Тандалманын 1 ге барабар элементтеринин саны ν_n болсун. Анда $q_n^* = \sqrt[5]{\nu_n / n}$ баалоосу q параметринин жылышпас баалоосу болобу? Абалдуу баалоосучу?

6.46. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда a

параметри үчүн тандалма медианасы ς^{*} нын абалдуу жана жылышпас баалоо болоорун текшергиле.

6.47. $X_1,...,X_n$ - бөлүштүрүү функциясы F болгон тандалма болсун, мында $F'(y)$ туундусу оң. $\delta \in (0,1)$ деңгээлинин ς_δ^{*} тандалма квантили чыныгы квантили $\varsigma_\delta = F^{-1}(\delta)$ нын өтө абалдуу баалоосу болоорун далилдегиле.

6.48. ς_δ^{*} тандалма квантили $\varsigma_\delta = \sup\{y : F(y) \le \delta\}$ чыныгы квантилинин өтө абалдуу баалоосу болбогон бөлүштүрүү функциясы F ке мисал келтиргиле.

6.49. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметри үчүн тандалма медиана жылышпас жана абалдуу баалоо болоорун текшергиле.

6.50. Параметри $\theta \in \{1,...,N\}$ болгон бөлүштүрүүдөн алынган $X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин, мында $\theta_1 \ne \theta_2$ болгондо $F_{\theta_1} \ne F_{\theta_2}$. $\rho(F,G) = \sup\limits_{y}|F(y) - G(y)|$ болсун. Анда

$$\rho(F_n^{*}, F_{\theta_n^{*}}) = \min_{\theta} \rho(F_n^{*}, F_\theta)$$

эрежеси менен табылган θ_n^{*} баалоосу абалдуу болоорун далилдегиле.

6.51. θ^{*} - жылышуусу $b(\theta) = 2\theta$ болгон θ параметринин баалоосу болсун. θ параметринин жылышпас баалоосун тургузгула.

6.52. θ^{*} - бул θ параметринин баалоосу болсун жана каалаган $\theta \in \Theta$ үчүн $n \to \infty$ да $D_\theta \theta_n^{*} \to 0$ сун. θ^{*} баалоосунун абалдуу экендигин далилдегиле.

6.53. $F_\theta, \theta \in \Theta \subseteq R,$ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин жана $\alpha = f(\theta)$ болсун, мында f - томпок бир маанилүү бүтүн функция. θ^{*} - θ параметринин жылышпас баалоосу болсун. Анда α параметринин $\alpha^{*} = f(\theta^{*})$ баалоосу терс эмес жылышууга ээ болоорун далилдегиле. Кайсыл шарттарда жылышуу тапатак оң болот?

6.54. Төмөндөгүгө мисал келтиргиле

а) моменттер методунун баалоосу жылышуучу болсо;

б) максималдык чындыкка жакындык баалоосу жылышпас болсо;

в) баалоо жылышпас жана абалсыз болсо;

г) баалоо жылышуучу жана абалдуу болсо.

6.55. Эгерде тандалманын үчүнчү моменти нөлгө барабар болсо, анда $\overline{X}$ тандалма орточосу жана S^2 тандалма дисперсиясы коррелирленбегендигин далилдегиле. Көрсөтмө: $Cov(\overline{X},S^2)=\frac{n-1}{n^2}EX_1^3$ экендигин далилдегиле.

6.56. Каалаган бекемделип коюлган y маанисинде $F_n^*(y)$ эмпирикалык бөлүштүрүү функциясы тандалманын $F(y)$ бөлүштүрүү функциясынын маанилеринин (күчтүү) абалдуу жана жылышпас баалоосу болоорун далилдегиле.

6.57. $X_1,...,X_n$ - бөлүштүрүү функциясы F болгон тандалма жана ν_n - тандалманын $[a,b)$ жарым интервалына таандык элементтеринин саны болсун, мында $a<b$ - бекемделип коюлган сандар. $F(b)-F(a)$ айырмасы үчүн ν_n/n статистикасы абалдуу жана жылышпас баалоо болоорун далилдегиле.

6.58. Каалаган бекемделген $\lambda\in R$ мааниси үчүн

$$\varphi_n^*(\lambda)=\int_R e^{i\lambda y}F_n^*(dy)$$

тандалма мүнөздүк функциясынын мааниси $\varphi(\lambda)=Ee^{i\lambda X_1}$ мүнөздүк функциясынын чыныгы маанисинин (күчтүү) абалдуу жана жылышпас баалоосу болоорун далилдегиле.

§7. Асимптотикалык нормалдуулук

$\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. $X_1,X_2,...$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, ал эми $\theta_n^*=\theta_n^*(X_1,...,X_n)$ - θ параметринин тандалма боюнча тургузулган кандайдыр баалоосу болсун.

Эгерде каалагандай $\theta\in\Theta$ үчүн $n\to\infty$ да $(\theta_n^*-\theta)\sqrt{n}$ чоңдугу нөлдүк орточолуу жана $\sigma^2(\theta)$ дисперсиясына ээ болгон нормалдуу законго жай жыйналса, анда θ_n^* статистикасы θ параметринин $\sigma^2(\theta)>0$ *коэффициентүү асимптотикалык нормалдуу баалоосу* деп аталат.

7.1. Чектүү дисперсияга ээ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма берилсин. Анда $\overline{X}$ статистикасы $\theta=EX_1$ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

Чыгаруу.

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_1)$$

барабардыгына ээ болобуз. Ошондуктан борбордук пределдик теореманын негизинде

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)}{\sqrt{DX_1}}$$

катышынын бөлүштүрүүсү стандарттуу нормалдуу законго жай жыйналат. Анда $\overline{X}$ баалоосу коэффициенти $\sigma^2 = DX_1$ болгон асимптотикалык нормалдуу болот.

7.2. $Eg^2(X_1) < \infty$ болсун. $\overline{gX}$ статистикасы $\theta = Eg(X_1)$ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.3. EX_1^4 чектүү болгон шартта тандалма дисперсия S^2 дисперсиянын асимптотикалык нормалдуу баасы болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

Чыгаруу. $a = EX_1$ жана $\sigma^2 = DX_1$ деп алабыз. $S^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$ тандалма дисперсиясын $S^2 = \overline{(X-a)^2} - (\overline{X}-a)^2$ көрүнүшүндө жазабыз.

$$\sqrt{n}(\overline{X}-a)^2 = \frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}(\overline{X}-a))^2$$

чоңдугу борбордук пределдик теорема боюнча $n \to \infty$ да нөлгө умтулуусу ыктымал, ал эми

$$\sqrt{n}(\overline{(X-a)^2} - \sigma^2) = \frac{\sum_1^n (X_i - a)^2 - nE(X_1 - a)^2}{\sqrt{n}}$$

кокустук чоңдугунун бөлүштүрүлүшү $n \to \infty$ да нөлдүк орточолуу жана $D(X_1 - a)^2$ дисперсиялуу нормалдуу законго жай жыйнала тургандыгын белгилеп кетебиз. Жай жыйналуучу удаалаштыкты жыйналышы ыктымал болгон удаалаштыкка кошуп,

$$\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}(\overline{(X-a)^2} - \sigma^2) - \sqrt{n}(\overline{X}-a)^2$$

чоңдугунун да нөлдүк орточолуу жана $D(X_1 - a)^2$ дисперсиялуу нормалдуу законго жай жыйнала тургандыгын алабыз. Демек, S^2 - σ^2 параметринин $D(X_1 - a)^2 = E(X_1 - a)^4 - \sigma^4$ коэффициентүү асимптотикалык нормалдуу баалоосу болот.

7.4. Каалагандай асимптотикалык нормалдуу баалоонун абалдуу болоорун далилдегиле.

7.5. θ_n^* - θ үчүн коэффициенти σ^2 болгон асимптотикалык нормалдуу баалоо болсун, мында каалаган θ үчүн $E_\theta(\theta_n^* - \theta)^4 < C/n^2$. $n \to \infty$ да

$$E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 = \sigma^2 n^{-1}(1 + o(1))$$

катышы аткарыла тургандыгын далилдегиле.

7.6. θ_n^* - θ үчүн коэффициенти σ^2 болгон асимптотикалык нормалдуу баалоо жана $\theta \neq 0$ болсун. Анда $(\theta_n^*)^2$ тын θ^2 үчүн асимптотикалык нормалдуу функция болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

Чыгаруу. $\sqrt{n}((\theta_n^*)^2 - \theta^2) = \sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)(\theta_n^* + \theta)$ барабардыгына ээ болобуз. θ_n^* абалдуу (7.4-мисалды кара) болгондуктан, $\theta_n^* + \theta \xrightarrow{p} 2\theta$. Нөлдүк орточолуу жана σ^2 дисперсиялуу нормалдуу законго жай жыйнала турган $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)$ удаалаштыгын 2θ туруктуусуна жыйналышы ыктымал болгон удаалаштыкка көбөйтүп, $\sqrt{n}((\theta_n^*)^2 - \theta^2)$ бөлүштүрүүсүнүн нөлдүк орточолуу жана $4\sigma^2\theta^2$ дисперсиялуу нормалдуу законго жай жыйнала тургандыгын алабыз.

7.7. θ^* - θ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болсун. Анда $|\theta^*|$ чоңдугу $|\theta|$ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болобу?

7.8. θ_n^* - $\theta \in \Theta$ үчүн коэффициенти $\sigma^2(\theta)$ болгон асимптотикалык нормалдуу баалоо, $H(y)$ функциясы Θ областында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү жана $H'(\theta) \neq 0$ болсун. Анда $H(\theta_n^*)$ нын $H(\theta)$ үчүн коэффициенти $\tilde{\sigma}^2(\theta) = (H'(\theta))^2 \sigma^2(\theta)$ болгон асимптотикалык нормалдуу баалоо экендигин далилдегиле.

7.9. $X_1, \ldots, X_n$ - орточосу $EX_1 = a$ жана дисперсиясы $DX_1 = \sigma^2 > 0$ болгон тандалма болсун. $H(t)$ функциясы $t = a$ чекитинде эки жолу дифференцирленүүчү жана $H'(a) = 0$ болсун. Төмөнкүлөрдү көрсөткүлө

а) $n \to \infty$ да $\sqrt{n}(H(\overline{X}) - H(a))$ кокустук чоңдугунунун нөлгө жыйналышынын ыктымал экендигин;

б) $n \to \infty$ да $n(H(\overline{X}) - H(a))$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүлүшүнүн нөлдүк орточолуу жана $H''(a)\sigma^2/2$ дисперсиялуу нормалдуу закон боюнча бөлүштүрүлгөн кокустук чоңдуктун квадратынын бөлүштүрүлүшүнө жай жыйналышын.

7.10. $X_1, \ldots, X_n$ - параметрлери a жана σ^2 болгон тандалма болсун, мында a параметринин мааниси белгилүү. Анда $\sigma_n^* = \sqrt{\pi/2} \cdot \overline{|X - a|}$ баалоосу σ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо боло алабы?

7.11. $X_1, \ldots, X_{2n}$ - нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган $2n$ көлөмдүү тандалма болсун. Анда

$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1})^2$

баалоосу σ^2 белгисиз дисперсиясы үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болобу?

7.12. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма жана $k \geq 1$ болсун. θ параметринин $\sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}}$ баалоосунун асимптотикалык нормалдуулугун далилдегиле жана асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.13. Жогорку мисалдын шартында $k \to \infty$ да $\theta^*_{k,n} \to X_{(n)}$ болуусу ыктымал экендигин далилдегиле. θ параметри үчүн $X_{(n)}$ асимптотикалык нормалдуу баалоо болобу?

7.14. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ статистикасы θ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болобу?

7.15. $X_1,...,X_n$ - $[\theta/2,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $\ln(4\overline{X}/3)$ статистикасы $\tau = \ln\theta$ параметринин асимптотикалык нормалдуу баалоосу болоорун көрсөткүлө. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.16. $X_1,...,X_n$ - $[0,a]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(a)$ параметри үчүн $\theta^*_n = \ln\overline{X}$ статистикасы нормалдуу асимптотикалык баалоо болот? Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.17. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Каалагандай натуралдык k үчүн $\sqrt[k]{k!/\overline{X^k}}$ статистикасы α параметринин асимптотикалык нормалдуу баалоосу болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.18. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\ln\overline{X}$ статистикасы $\tau = \ln\alpha$ параметринин асимптотикалык нормалдуу баалоосу болоорун көрсөткүлө. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.19. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(a)$ параметри үчүн $\theta_n^* = e^{-\overline{X^2}}$ статистикасы нормалдуу асимптотикалык баалоо болот? Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.20. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y}, \ \textit{эгерде} \ y \geq \beta \\ 0, \ \textit{эгерде} \ y < \beta \end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Жылышуу параметри β нын төмөнкү баалоолору асимптотикалык нормалдуу болоорун текшергиле:

а) $X_{(1)}$;   б) $\overline{X} - 1$

Эгерде болсо, асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.21. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1} e^{-(y-\beta)/\alpha}, \ \textit{эгерде} \ y \geq \beta \\ 0, \ \textit{эгерде} \ y < \beta \end{cases}$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) $\alpha > 0$ жана $\beta \in R$ параметрлеринин моменттер методундагы $\alpha_n^* = \sqrt{S^2}$ жана $\beta_n^* = \overline{X} - \sqrt{S^2}$ баалоолорунун асимптотикалык нормалдуулугун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициенттерин тапкыла.

б) α жана β параметрлеринин чындыкка жакындык баалоолору $\alpha_n^* = \overline{X} - X_{(1)}$ жана $\beta_n^* = X_{(1)}$ асимптотикалык нормалдуу болушабы? Эгерде болушса, анда асимптотикалык нормалдуулук коэффициенттерин тапкыла.

Чыгаруу. а) $1/\alpha$ параметрлүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ болгон $Y_i = X_i - \beta$ кокустук чоңдуктарын карайбыз. Анда

$$\sqrt{n}(\beta_n^* - \beta) = \sqrt{n}(\overline{X} - \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} - \beta) \equiv \sqrt{n}(\overline{Y} - \sqrt{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2}).$$

Төмөнкүдөй белгилөөлөрдү кийрели:

$$h(t_1, t_2) = t_1 - \sqrt{t_2 - t_1^2}, \quad G(F) = h(E_F Y_1, E_F Y_1^2), \ G(F_n^*) = h(\overline{Y}, \overline{Y^2}) = \overline{Y} - \sqrt{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2}.$$

$h(t)$ функциясы $a = (EY_1, EY_1^2) = (\alpha, 2\alpha^2)$ чекитинде дифференцирленүүчү. Бул чекиттеги жекече туундулар $(2, -1/2\alpha)$ га барабар жана

$$h(a) = \alpha - \sqrt{2\alpha^2 - \alpha^2} = 0.$$

σ^2 ковариациялар матрицасы чектүү:

$$\sigma_{1,1} = DY_1 = \alpha^2,$$
$$\sigma_{2,2} = DY_1^{\,2} = 20\alpha^4,$$
$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = Cov(Y_1, Y_1^2) = 4\alpha^3.$$

Ошондуктан 1А теоремасы [4, 1-гл, § 7] боюнча

$$\sqrt{n}(\overline{Y} - \sqrt{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2}) = \sqrt{n}(h(\overline{Y}, \overline{Y^2}) - h(a))$$

кокустук чоңдугунун $\eta = \frac{\partial h}{\partial t_1}(a)\cdot\xi_1 + \frac{\partial h}{\partial t_2}(a)\cdot\xi_2 = 2\xi_1 - \xi_2 / 2\alpha$ чоңдугуна жай жыйнала тургандыгына ээ болобуз, мында (ξ_1, ξ_2) вектору орточолордун нөлдүк векторуна жана σ^2 ковариациялар матрицасына ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. η чоңдугу нөлдүк орточолуу жана

$$D\eta = 4\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} / 4\alpha^2 - 2\cdot 2\cdot \sigma_{1,2} / 2\alpha = \alpha^2$$

дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. Демек, β_n^* баалоосу α^2 коэффициентүү асимптотикалык нормалдуу баалоо болот.

7.22. Параметрлери β жана θ болгон Парето бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. β жана θ параметрлеринин максималдык чындыкка жакындык баалоолору $\beta_n^* = 1/(\overline{\ln X} - \ln X_{(1)})$ жана $\theta_n^* = X_{(1)}$ лар асимптотикалык нормалдуу баалоолор болушабы? Эгерде болушса, анда асимптотикалык нормалдуулук коэффициенттерин тапкыла. Көрсөтмө: 6.26-мисалдын чечимин пайдалангыла.

7.23. α белгилүү параметри жана $\theta > 0$ белгисиз параметри менен берилген Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилсин. Белгисиз $\theta > 0$ маанисинин $1/\overline{X^\alpha}$ баалоосу асимптотикалык нормалдуу болобу?

7.24. $X_1,\dots,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta = \theta(p)$ параметри үчүн $\theta_n^* = \arcsin\sqrt{X}$ статистикасы асимптотикалык нормалдуу баалоо болот? Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

Чыгаруу. $\theta_n^* = \arcsin\sqrt{\overline{X}}$ статистикасы $\theta_n^* = H(\overline{g(X)})$ көрүнүшүндө, мында $H(t) = \arcsin\sqrt{t},\ g(y) = y.$ $H(t)$ функциясы $E_p g(X_1) = p$ чекитинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү,

$$H'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(1-t)t}},\quad H'(t)\,|_{t=E_p g(X_1)} = \frac{1}{2\sqrt{(1-p)p}}.$$

Анда, θ_n^* баалоосу $\theta = \arcsin\sqrt{E_p g(X_1)} = \arcsin\sqrt{p}$ параметринин

$$\sigma^2(p) = (H'(E_p g(X_1)))^2 \cdot D_p g(X_1) = 1/4$$

коэффициентүү асимптотикалык нормалдуу баалоосу болот.

7.25. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\arcsin(2\overline{X}-1)$ статистикасынын $\tau=\arcsin(2p-1)$ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун көрсөткүлө. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.26. $X_1,...,X_n$ - параметрлери m жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta=\theta(m,p)$ параметри үчүн $\theta_n^*=e^{\overline{X}}$ статистикасы асимптотикалык нормалдуу баалоо болот? Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.27. $\overline{X}$ статистикасы Пуассон бөлүштүрүүсүнүн λ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун көрсөткүлө. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.28. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\sqrt{\overline{X}}$ статистикасынын $\tau=\sqrt{\lambda}$ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун көрсөткүлө. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.29. $X_1,...,X_n$ - параметри $\lambda, \lambda\neq 1$ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Кандай $\theta=\theta(\lambda)$ параметри үчүн $\theta_n^*=\overline{X}e^{-\overline{X}}$ статистикасы асимптотикалык нормалдуу баалоо болот? Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.30. Пуассон бөлүштүрүүсүнүн λ параметри үчүн бир эле убакытта абалдуу жана асимптотикалык нормалдуу эмес болгон баалоону тургузгула.

7.31. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $p_n^*=1/(1+\overline{X})$ статистикасы p параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болобу? Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.32. $X_1,...,X_n$ - орточосу $EX_1=1$ жана дисперсиясы $DX_1=\sigma^2>0$ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, $S_n=X_1+...+X_n$ деп белгилейли. $\psi_n=S_n^3/n^{5/2}-\sqrt{n}$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүлөр удаалаштыгынын алсыз пределин тапкыла.

7.33. n-эркин даражалуу χ^2 бөлүштүрүүсүнө ээ болгон χ_n^2 кокустук чоңдугу үчүн төмөнкү «Фишердин аппроксимациясы» туура экендигин далилдегиле: $n\to\infty$ да $\sqrt{2\chi_n^2}-\sqrt{2n}$ айырмасынын бөлүштүрүүсү стандарттуу нормалдуу законго жай жыйналат.

7.34. n-эркин даражалуу χ^2 бөлүштүрүүсүнө ээ болгон χ^2_n кокустук чоңдугу үчүн төмөнкү «Уилсон-Хилферттин аппроксимациясы» туура экендигин далилдегиле: $n \to \infty$ да

$$\sqrt{9n/2}(\sqrt[3]{\chi^2_n/n} - 1 + 2/9n)$$

чоңдугунун бөлүштүрүүсү стандарттуу нормалдуу законго жай жыйналат.

7.35. $X_1,...,X_n$ - $[0,2\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда ς^* тандалма медианасынын θ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.36. $X_1,...,X_n$ - жылышуу параметри a болгон Коши бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Анда ς^* тандалма медианасынын a үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.37. $X_1,...,X_n$ - жылышуу параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда ς^* тандалма медианасынын $\tau = (\ln 2)/\alpha$ параметри үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.38. $X_1,...,X_n$ - бөлүштүрүү функциясы F абсолюттук үзгүлтүксүз функция жана $f(x)$ тыгыздыгы F бөлүштүрүүсүнүн ς медианасынын кандайдыр бир чеке белинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болгон кандайдыр бир бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. F бөлүштүрүүсүнүн ς медианасы үчүн тандалма медиананын асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.39. $X_1,...,X_n$ - бөлүштүрүү функциясы F абсолюттук үзгүлтүксүз функция жана тыгыздыгы $f(x)$ ар дайым үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\delta \in (0,1)$ деңгээлинин тандалма квантили ς^*_δ чыныгы квантиль $\varsigma_\delta = F^{-1}(\delta)$ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.40. $0 < F(y) < 1$ шарты аткарылган каалагандай фиксирленген y үчүн F^*_n эмпирикалык бөлүштүрүү функциясынын мааниси тандалманын жалпы бөлүштүрүү функциясынын мааниси $F(y)$ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

7.41. Каалаган фиксирленген $\lambda \in R$ үчүн тандалманын мүнөздүк функциясынын

$$\varphi_n^*(\lambda) = \int_R e^{i\lambda y} F_n^*(dy)$$

мааниси мүнөздүк функциянын чыныгы мааниси $\varphi(\lambda) = Ee^{i\lambda X_1}$ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болоорун далилдегиле. Асимптотикалык нормалдуулук коэффициентин тапкыла.

Чыгаруу. Борбордук пределдик теорема боюнча комплекстүү маанилүү $\sqrt{n}(\overline{e^{i\lambda X}} - \varphi(\lambda))$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүсү $\xi + i\eta$ бөлүштүрүүсүнө жай жыйналат, мында (ξ, η) вектору орточолордун нөлдүк вектору жана төмөнкү ковариациялык матрица тегиздигинде нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ:

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} D\cos(\lambda X_1) & Cov(\cos(\lambda X_1), \sin(\lambda X_1)) \\ Cov(\cos(\lambda X_1), \sin(\lambda X_1)) & D\sin(\lambda X_1)) \end{pmatrix}.$$

Төртүнчү бөлүм
Баалоолорду салыштыруу

§8. Орточо квадраттык ыкма

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. $X_1, X_2, \dots$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, ал эми $\theta_n^* = \theta_n^*(X_1, \dots, X_n)$ - тандалма боюнча тургузулган кандайдыр баалоо болсун.

θ параметринин θ_n^* баалоосунун *орточо квадраттык четтөөсү* деп, $E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2$ чоңдугу аталат. Баалоонун орточо квадраттык четтөөсү анын жылышуусу жана дисперсиясы менен төмөнкүдөй байланышат:

$$E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 = D_\theta \theta_n^* + b^2(\theta).$$

Орточо квадраттык ыкма боюнча эгерде каалаган $\theta \in \Theta$ үчүн $E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 \le E_\theta(\theta_n^{**} - \theta)^2$ барабардыгы аткарылса, анда θ_n^* баалоосу θ_n^{**} баалоосунан *жаман эмес*.

Орточо квадраттык ыкма боюнча эгерде жок дегенде бир $\theta \in \Theta$ үчүн $E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 < E_\theta(\theta_n^{**} - \theta)^2$ барбардыгы аткарылса, анда θ_n^* баалоосу θ_n^{**} баалоосунан *жакшы*.

8.1. $X_1, \dots, X_n$ - $a > 0$ орточолуу жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. a параметринин $\overline{X}$ жана $\max(0, \overline{X})$ баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.2. $X_1, \dots, X_n$ - белгилүү $a > 0$ орточолуу жана белгисиз σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. σ^2 параметринин

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \text{жана} \quad S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$$

баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.3. $X_1, \dots, X_n$ - a орточолуу жана σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган $2n$ көлөмдүү тандалма болсун. σ^2 параметринин

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{2n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \text{жана} \quad (\sigma^2)_{2n}^* = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - X_{2i-1})^2$$

баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.4. $X_1,...,X_n$ - a орточолуу жана σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Дисперсиянын

$$c_n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

түрүндөгү баалоолор классындагы орточо квадраттык мааниде эң жакшы болгон баалоосун тапкыла.

8.5. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметринин $2\overline{X}, X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ жана $X_{(1)}+X_{(n)}$ баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.6. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметринин $\theta^*_{k,n}=\frac{n+k}{n}X_{(n)}, k=0,1,2,...$ баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.7. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметринин $c_nX_{(n)}$ түрүндөгү баалоолор классына кирген орточо квадраттык мааниде эң жакшы болгон баалоосун тапкыла.

8.8. $X_1,...,X_n$ - $[\theta,2\theta]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметринин $aX_{(1)}+bX_{(n)}$ түрүндөгү жылышпас баалоолор классы каралат. Бул класстан алынган баалоолорду орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.9. $X_1,...,X_n$ - $[\theta,\theta+1]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) θ параметринин $\overline{X}-1/2, X_{(1)}$ жана $X_{(n)}-1$ баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

б) θ параметринин $a(X_{(n)}-1)+(1-a)X_{(1)}, a\in[0,1]$ түрүндөгү максималдуу чындыкка жакын баалоолор классына кирген, орточо квадраттык мааниде эң жакшы болгон баалоосун тапкыла.

8.10. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_\beta(y)=\begin{cases} e^{\beta-y}, & эгерде\ y\ge\beta \\ 0, & эгерде\ y<\beta \end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Жылышуу параметри β нын $\overline{X}-1, X_{(1)}$ жана $X_{(1)}-1/n$ баалоолорун орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.11. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. λ параметринин каалагандай эки түрдүү баалоосун тургузгула жана аларды орточо квадраттык мааниде салыштыргыла.

8.12. Дисперсиялары $\sigma_1^2(\theta)$ жана $\sigma_2^2(\theta)$ үчүн бардык $\theta \in \Theta$ да $\sigma_1^2(\theta) \le \sigma_2^2(\theta)$, бирок $E_\theta(\theta_1^* - \theta)^2 > E_\theta(\theta_2^* - \theta)^2$ орун алган θ_1^* жана θ_2^* баалоолоруна мисалдар келтиргиле.

8.13. Эгерде θ_1^* жана θ_2^* баалоолору бирдей жылышууга ээ болушса, анда качан жана качан $E_\theta(\theta_1^* - \theta)^2 \le E_\theta(\theta_2^* - \theta)^2$ болгондо гана каалаган $\theta \in \Theta$ үчүн $D_\theta \theta_1^* \le D_\theta \theta_2^*$ аткарыла тургандыгын далилдегиле.

§9. Асимптотикалык ыкма

Орточо квадраттык ыкма менен бирдикте эле баалоолорду салыштыруу үчүн *асимптотикалык ыкма* колдонулат. Тандалманын көлөмү абдан чоң болгон учурда асимптотикалык нормалдуу баалоолорду салыштыруу үчүн бул ыкманы колдонуу ыңгайлуу. Эгерде каалаган $\theta \in \Theta$ үчүн $\sigma_1^2(\theta) \le \sigma_2^2(\theta)$ жана жок дегенде бир $\theta \in \Theta$ үчүн $\sigma_1^2(\theta) < \sigma_2^2(\theta)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда асимптотикалык ыкма боюнча асимптотикалык нормалдуулук коэффициенти $\sigma_1^2(\theta)$ болгон θ_1^* асимптотикалык нормалдуу баалоосу коэффициенти $\sigma_2^2(\theta)$ болгон θ_2^* асимптотикалык нормалдуу баалоосунан жакшы болот.

9.1. $X_1,...,X_n$ - белгилүү a орточолуу жана белгисиз σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Асимптотикалык ыкманын жардамында σ^2 параметринин төмөнкү баалоолорун салыштыргыла:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - a|\right)^2 \text{ жана } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 .$$

9.2. $X_1,...,X_n$ - a орточолуу жана $\sigma^2 > 0$ дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Асимптотикалык ыкманын жардамында a параметринин баалоолору катары тандалма орточону жана тандалма медиананы салыштыргыла.

9.3. $X_1,...,X_n$ - төмөнкүдөй эки нормалдуу бөлүштүрүүнүн аралашмасы болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун: 92% ин орточосу a жана дисперсиясы 1 болгон нормалдуу бөлүштүрүү түзүп, ал эми 8% ин ошол эле a орточолуу жана дисперсиясы 16 болгон нормалдуу бөлүштүрүү түзсүн. Асимптотикалык ыкманын жардамында a параметринин баалоолору катары тандалма орточону жана тандалма медиананы салыштыргыла.

9.4. $X_1,\dots,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\theta^*_{k,n} = \sqrt[k]{9k+1)\overline{X^k}}$ баалоолорунун ичинде эң жакшы асимптотикалык нормалдуу баалоо барбы?

9.5. $X_1,\dots,X_n$ - $[0,2\theta]$ кесиндисиндеги бир калыпта бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Асимптотикалык ыкманын жардамында θ параметринин баалоолору катары тандалма орточону жана тандалма медиананы салыштыргыла.

9.6. $X_1,\dots,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\alpha^*_{k,n} = \sqrt[k]{k!/\overline{X^k}}$ баалоолорунун ичинде эң жакшы асимптотикалык нормалдуу баалоо барбы?

§10. Жетиштүү статистикалар

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. $X_1, X_2, \dots$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

Эгерде S статистикасынын бекемделген маанисиндеги тандалманын $P_\theta\{(X_1,\dots,X_n) \in B \mid S = s\},\ B \subseteq R^n$ шарттуу бөлүштүрүлүшү θ параметринен көз каранды болбосо, анда $X_1,\dots,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган $S(X_1,\dots,X_n)$ статистикасы θ параметри үчүн *жетиштүү* деп аталат.

R деги кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу доминирлөө шарты аткарылсын, б.а. бул параметрдик жыйын μ га салыштырмалуу абсолюттуу үзгүлтүксүз болгон бөлүштүрүүлөрдөн турсун. f_θ деп, μ ченемине салыштырмалуу F_θ бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгын белгилейли.

Анда статистиканын жетиштүүлүгүнүн төмөнкү критерийи туура болот.

Нейман-Фишердин теоремасы. S статистикасы θ параметри үчүн жетиштүү болот, качан жана качан гана тандалманын биргелешкен тыгыздыгын

$$f_\theta(x_1,\dots,x_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \psi(S(x_1,\dots,x_n),\theta) \cdot h(x_1,\dots,x_n)$$

көрүнүшүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгондо.

10.1. $X_1,...,X_n$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $X_1 = x_1,...,X_n = x_n$ шартындагы тандалманын шарттуу биргелешкен бөлүштүрүүсүн тапкыла.

а) тандалма; б) вариациялык катар

үчүн θ параметри үчүн жетиштүү статистика боло алабы?

10.2. F_θ бөлүштүрүүсү кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу f_θ тыгыздыгы менен берилген. Нейман-Фишердин теоремасын пайдаланып, θ параметри үчүн $X_1,...,X_n$ тандалмасы боюнча тургузулган вариациялык катар жетиштүү статистика болоорун далилдегиле.

10.3. $X_1,...,X_n$ - a орточолуу жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $X_1 + ... + X_n = y$ шартындагы тандалманын шарттуу биргелешкен бөлүштүрүүсүн тапкыла.

10.4. $X_1,...,X_n$ - нөлдүк орточолуу жана σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. σ^2 параметри үчүн R деги маанилери менен жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.5. $X_1,...,X_n$ - a орточолуу жана σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Төмөнкүлөр үчүн $\overline{X^2}$ статистикасы жетиштүү болобу:

а) (a,σ^2) эки ченемдүү параметри;

б) эгерде $a = 0$ болсо, σ^2 параметри;

в) эгерде $a = 3$ болсо, σ^2 параметри.

10.6. $X_1,...,X_n$ - a орточолуу жана σ^2 дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. (a,σ^2) эки ченемдүү параметри үчүн R деги маанилери менен жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.7. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметри үчүн R деги маанилери менен жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.8. $X_1,...,X_n$ - $[a,b]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Эки ченемдүү (a,b) параметри үчүн $\overline{X}$ статистикасы жетиштүү болобу? $X_{(n)}$ статистикасычы? $(X_{(1)}, X_{(n)})$ эки ченемдүү статистикасычы?

10.9. а) $[\theta,\theta+1]$ б) $[\theta,2\theta]$

кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган $X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин. θ параметри үчүн R^2 дагы маанилери менен жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.10. $X_1,...,X_n$ - $[-\theta,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметри үчүн R деги маанилери менен жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.11. Тыгыздыгы

$$f_\beta(y)=\begin{cases} e^{\beta-y}, \ эгерде\ y\ge\beta \\ 0, \ эгерде\ y<\beta \end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн жылышуу параметри β үчүн жетиштүү статистиканы тапкыла. $\overline{X}$ жетиштүү статистика болобу?

10.12. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y)=\begin{cases} \alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, \ эгерде\ y\ge\beta \\ 0, \ эгерде\ y<\beta \end{cases}, \ \alpha>0,\beta\in R$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Төмөнкүлөр үчүн жетиштүү статистиканы тапкыла:

а) эгерде α мааниси белгилүү болсо, β параметринин;

б) эгерде β мааниси белгилүү болсо, α параметринин;

в) $\theta=(\alpha,\beta)$ эки ченемдүү параметринин.

10.13. $X_1,...,X_n$ - параметри $\alpha=1/\theta$ жана β-белгилүү болгон Γ - бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\theta>0$ параметри үчүн R деги маанилери менен жетиштүү статистика барбы? $\overline{X}/\beta$ статистикасынын бөлүштүрүүсүн тапкыла. Бул статистика жетиштүү болобу?

10.14. $X_1,...,X_n$ - параметри α жана β болгон Γ - бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Эки ченемдүү (α,β) параметри үчүн R^2 дагы маанилери менен жетиштүү статистика барбы?

10.15. Параметрлери $\beta>0$ жана $\theta>0$ болгон Парето бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Төмөнкүлөр үчүн жетиштүү статистиканы тапкыла:

а) эгерде θ мааниси белгилүү болсо, β параметринин;

б) эгерде β мааниси белгилүү болсо, θ параметринин;

в) (β,θ) вектордук параметринин.

10.16. Параметрлери $\alpha>0$ жана $\theta>0$ болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Эгерде α мааниси белгилүү болсо, анда θ үчүн жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.17. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы $x \in (0,1)$ үчүн $\theta x^{\theta-1}$ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметри үчүн жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.18. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. p параметри үчүн $\overline{X}$ жетиштүү статистика болобу? Эгерде $g:\{0,...,n\} \to R$ чагылтуусу өз ара бир маанилүү болбосо, анда $S = g(n\overline{X})$ түрүндөгү статистиканын жетиштүү эместигин далилдегиле.

Чыгаруу. $k \in \{0,1,...,n\}$ жана $k_1,...,k_n \in \{0,1\}$ сандары үчүн $k_1 + ... + k_n = k$ шарты орун алсын. Төмөнкүдөй барабардыкка ээ болобуз:

$$P\{X_1 = k_1,...,X_n = k_n \mid n\overline{X} = k\} = \frac{P\{X_1 = k_1,...,X_n = k_n\}}{P\{n\overline{X} = k\}}$$

$$= \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{1}{C_n^k}.$$

Демек, $n\overline{X} = k$ шартында k бирдиктин жана $n-k$ нөлдүн каалагандай жыйыны бирдей эле $1/C_n^k$ ыктымалдыгына ээ жана p параметринен көз карандысыз.

10.19. $X_1,...,X_n$ - параметрлери m жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $X_1 + ... + X_n = k$ шартындагы тандалманын шарттуу биргелешкен бөлүштүрүүсүн тапкыла. m белгилүү болгон учурда p параметри үчүн $\overline{X}$ жетиштүү статистика болобу?

10.20. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $X_1 + ... + X_n = k$ шартындагы тандалманын шарттуу биргелешкен бөлүштүрүүсүн тапкыла. λ параметри үчүн $\overline{X}$ жетиштүү статистика болобу? $(\overline{X})^2, \overline{X^2}$ жана $\sin\overline{X}$ статистикалары жетиштүү болушабы?

10.21. $S = n\overline{X} - 5$ статистикасы Пуассон бөлүштүрүүсүнүн λ параметри үчүн жетиштүү статистика болобу? Төмөнкү статистикалар жетиштүү боло алышабы:

а) $2S$;
б) S^2;
в) S/n^2;
г) $\sin S$;
д) e^S;
е) $-S$?

10.22. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $g: Z_+ \to R$ чагылтуусу өз ара бир маанилүү болгондо гана $S = g(n\overline{X})$ түрүндөгү статистиканын λ параметри үчүн жетиштүү статистика болоорун далилдегиле.

10.23. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $X_1+...+X_n=k$ шартындагы тандалманын шарттуу биргелешкен бөлүштүрүүсүн тапкыла. λ параметри үчүн $\overline{X}$ жетиштүү статистика болобу?

10.24. $X_1,...,X_n$ - $\{1,...,m\}$ бүтүн сандар көптүгүндөгү F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. m сандагы статистикалардын

$$\nu(k)=\sum_{i=1}^{n} I\{X_i=k\},\quad k=1,...,m$$

жыйыны θ параметри үчүн жетиштүү статистика болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. $m=2$ болгон учурду карайбыз. $\nu(1)=n_1$ жана $\nu(2)=n-n_1$ болсун. Бул шарт орун алган учурда $X_1,...,X_n$ тандалмасы n_1 сандагы бирдикти жана $n-n_2$ сандагы экиликти кармап турган удаалаштыктар көптүгүндө бир калыптагы дискреттүү бөлүштүрүүгө ээ болот; бул бир калыптагы бөлүштүрүү θ дан көз каранды эмес.

10.25. $X_1,...,X_n$ - $\{1,...,\theta\}$ чектүү көптүгүндөгү бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында θ - оң бүтүн параметр. θ параметри үчүн жетиштүү статистиканы тапкыла.

10.26. $F_\theta, \theta\in\Theta$ - кандайдыр бир $k\in Z$ үчүн $\inf_{\theta\in\Theta} F_\theta(k)>0$ орун алган бүтүн сандар торчосундагы бөлүштүрүүлөрдүн параметрдик жыйыны болсун. S - θ параметри үчүн жетиштүү статистика болсун, жана бардык θ маанилери үчүн S жана T статистикалары көз карандысыз болушсун. Анда T статистикасынын бөлүштүрүүсү θ дан көз каранды эмес экендигин далилдегиле.

§11. Толук статистикалар

$\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. $X_1,X_2,...$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

Эгерде качан жана качан каалаган $\theta\in\Theta$ параметри үчүн $P_\theta\{g(S)=0\}=1$ болгондо гана θ өзгөрүлмөсүнүн $E_\theta g(S)$ функциясы теңдеш түрдө нөлгө барабар болсо, анда берилген тандалма боюнча тургузулган $S(X_1,...,X_n)$ статистикасы *толук* деп аталат.

11.1. $X_1,...,X_n$ - $F_\theta, \theta \in \Theta \subseteq R^k$ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма жана $S(X_1,...,X_n)$ - R^m деги маанилери менен берилген кандайдыр бир статистика болсун. R^m ден R^k га аракет этүүчү g_1 жана g_2 борелдик функциялары үчүн $g_1(S)$ жана $g_2(S)$ тер бирдей жылышууга ээ болушсун. Эгерде S статистикасы толук болсо, анда $P_\theta\{g_1(S)=g_2(S)\}=1$ экендигин далилдегиле.

11.2. Орточосу a жана дисперсиясы 1 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн $\overline{X}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

Чыгаруу. $\overline{X}$ статистикасы a орточолуу жана дисперсиясы 1 болгон нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болгондуктан, каалаган a чыныгы саны үчүн $E_a g(\overline{X})=0$ болжолдоосу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi/n}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-(x-a)^2 n/2}dx \equiv 0$$

экендигин билдирет, жана бул интеграл абсолюттуу жыйналат. Анда

$$H(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{ax}dx$$

интегралы да абсолюттук жыйналат жана теңдеш түрдө нөлгө барабар болот, мында $h(x)=g(x)e^{-x^2 n/2}$. h функциясын оң жана терс бөлүктөрдүн айырмасы түрүндө көрсөтөбүз: $h(x)=h^+(x)-h^-(x)$, мында

$$h^+(x)=h(x)\cdot I\{h(x)>0\}\geq 0$$

жана

$$h^-(x)=-h(x)\cdot I\{h(x)<0\}\geq 0.$$

$H(a)\equiv 0$ барабардыгынын негизинде бардык a үчүн төмөнкү интегралдардын маанилери дал келишет:

$$H^+(a)=\int_{-\infty}^{\infty} h^+(x)e^{ax}dx=\int_{-\infty}^{\infty} h^-(x)e^{ax}dx=H^-(a).$$

Мындан $a=0$ болгон учурда

$$c=\int_{-\infty}^{\infty} h^+(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} h^-(x)dx$$

барабардыгы келип чыгат.

Ошондуктан $f^+(x)=h^+(x)/c$ жана $f^-(x)=h^-(x)/c$ функциялары R деги кандайдыр бир абсолюттуу үзгүлтүксүз F^+ жана F^- бөлүштүрүүлөрүнүн тыгыздыктары болуп саналышат. Ошентип, Лапластын төмөнкү өзгөртүп түзүүлөрү дал келишет:

$$\varphi^+(a)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f^+(x)e^{ax}dx\equiv\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f^-(x)e^{ax}dx=\varphi^-(a).$$

$\varphi^{+}(a)$ жана $\varphi^{-}(a)$ нын комплекстик тегиздиктеги аналитикалык улантылышын карайбыз.

$$\varphi^{+}(a+ib)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+ib)x}f^{+}(x)dx$$

жана

$$\varphi^{-}(a+ib)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+ib)x}f^{-}(x)dx$$

функциялары бардык комплекстик тегиздикте аналитикалык болуп эсептелишет жана чыныгы түз сызыкта дал келишет. Жалгыздыктын ички теоремасы боюнча бул функциялар бардык комплекстик тегиздикте, жекече учурда $a=0$ мнимый түз сызыгында дал келишет. Эми $\varphi^{+}(ib)$ жана $\varphi^{-}(ib)$ функциялары тиешелеш түрдө F^{+} жана F^{-} бөлүштүрүүлөрүнүн b чекитиндеги мүнөздүк функциялары болоорун белгилеп кетүү калды. Мүнөздүк функциялардын дал келүүчүлүгүнөн тыгыздыктардын дайыма барабардыгы $f^{+}(x)=f^{-}(x)$ келип чыгат. Анда Лебег ченемине салыштырмалуу ар дайым $h^{+}(x)=h^{-}(x)$, жана тиешелеш түрдө $h(x)=0$. Ошондуктан ар дайым Лебег ченемине салыштырмалуу $g(x)=0$, жана $\overline{X}$ статистикасы толук болуп саналат.

11.3. $X_1,...,X_n$ - нөлдүк орточолуу жана дисперсиясы σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. σ^2 параметри үчүн $\overline{X^2}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

11.4. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн $\overline{X}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

11.5. Тыгыздыгы

$$f_{\beta}(y)=\begin{cases}e^{\beta-y}, & эгерде\ y\geq\beta\\ 0, & эгерде\ y<\beta\end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында $\beta\in R$. Анда $X_{(1)}$ статистикасынын жетиштүүлүгүн далилдегиле.

11.6. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y)=\begin{cases}\alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, & эгерде\ y\geq\beta\\ 0, & эгерде\ y<\beta\end{cases},\quad \alpha>0,\beta\in R$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) эгерде α мааниси белгилүү болсо, β үчүн $\overline{X}$ толук статистика болоорун далилдегиле;

б) эгерде β мааниси белгилүү болсо, α үчүн $X_{(1)}$ толук статистика болоорун далилдегиле;

в) $\theta=(\alpha,\beta)$ эки ченемдүү параметри үчүн толук статистикага мисал келтиргиле.

11.7. $X_1,\dots,X_n$ - $[0,\theta],\theta\in\Theta$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\Theta=(0,\infty)$ болгондо θ параметри үчүн $X_{(n)}$ толук статистика болоорун далилдегиле. $\Theta=(1,\infty)$ болгондо θ параметри үчүн $X_{(n)}$ толук статистика болобу?

11.8. $[-\theta,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн θ параметри үчүн $S=\max\{|X_1|,\dots,|X_n|\}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

11.9. $X_1,\dots,X_n$ - $[\theta,\theta+1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Эки ченемдүү $(X_{(1)},X_{(n)})$ статистикасы толук эместигин далилдегиле.

Чыгаруу. Фиксирленген n үчүн каалаган $\theta\in R$ да $E_\theta g_n(X_{(1)},X_{(n)})=0$, бирок $P_\theta\{g_n(X_{(1)},X_{(n)})=0\}\neq 1$ аткарыла тургандай $g_n:R^2\to R$ функциясын көрсөтөбүз.

Ал үчүн $E_\theta X_{(1)}=\theta+1/(n+1)$ жана $E_\theta X_{(n)}=\theta+1-1/(n+1)$ ди табабыз. Изделүүчү функция катары $g_n(x,y)=y-x+1+2/(n+1)$ ти эсептөөгө болот.

11.10. $X_1,\dots,X_n$ - $[\theta,2\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Эки ченемдүү $(X_{(1)},X_{(n)})$ статистикасы толук эместигин далилдегиле.

11.11. $X_1,\dots,X_n$ - $y\in(0,1)$ үчүн тыгыздыгы $\theta y^{\theta-1},\theta>0$ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ параметри үчүн $\overline{\ln X}$ статистикасы толук болоорун далилдегиле.

11.12. Параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма үчүн $\overline{X}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

Чыгаруу. $n\overline{X}$ чоңдугу параметрлери n жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүгө ээ. Ошондуктан

$$E_p g(\overline{X})=\sum_{k=0}^{n} g(k/n)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(1-p)^n\sum_{k=0}^{n} g(k/n)C_n^k(\frac{p}{1-p})^k.$$

$\sum_{k=0}^{n} g(k/n)C_n^k x^k$ суммасы $x=p/(1-p)$ өзгөрүлмөсү боюнча n ден жогорку эмес даражадагы көп мүчө болуп саналат. Каалаган $p\in(0,1)$ үчүн $E_p g(\overline{X})=0$ болжолдоосу каалаган $x\in(0,\infty)$ чекити бул көп мүчөнүн тамыры экендигин билдирет. Анда көп мүчөнүн бардык $g(k/n)C_n^k$ коэффициенттери нөлгө барабар болушат. Ошентип, $k=0,1,\ldots,n$ болгондо $g(k/n)=0$, ошондуктан $\overline{X}$ - толук статистика.

11.13. Эгерде m - белгилүү болсо, параметрлери m жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн $\overline{X}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

11.14. Параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма үчүн $\overline{X}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

11.15. Параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн $\overline{X}$ статистикасынын толуктугун далилдегиле.

11.16. $X_1,\ldots,X_n$ - $\{1,\ldots,\theta\}$ чектүү көптүгүндөгү бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында θ - бүтүн оң параметр. θ параметри үчүн $X_{(n)}$ статистикасы толук болоорун далилдегиле.

11.17. $X_1,\ldots,X_n$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма жана $E_\theta X_1=\theta$ болсун. θ параметри үчүн $X_1,\ldots,X_n$ тандалмасы толук статистика болбой тургандыгын далилдегиле.

§12. Эффективдүү баалоолор

$\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун. $X_1,\ldots,X_n$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма жана $\theta_n^*=\theta_n^*(X_1,\ldots,X_n)$ - θ параметринин $b_n(\theta)=E_\theta\theta_n^*-\theta$ жылышуусуна ээ болгон кандайдыр бир баалоосу болсун.

θ_n^* баалоосу $b_n(\theta)$ *жылышуусуна ээ болгон баалоолор классында эффективдүү* деп аталат, эгерде ал ошондой эле $b_n(\theta)$ жылышуусуна ээ болгон баалоолордон орточо квадраттык мааниде жаман болбосо. Төмөндөгү орун алат

Теорема. $S=S(X_1,\ldots,X_n)$ - θ параметри үчүн жетиштүү толук статистика болсун. Анда $E(\theta_n^*\,|\,S)$ баалоосу $b_n(\theta)$ жылышуусуна ээ болгон баалоолор классындагы жалгыз гана эффективдүү баалоо болот.

12.1. θ^* - жылышуусу $\alpha\theta$ болгон баалоолор классындагы эффективдүү баалоо болсун, мында α - турактуу. Жылышпоочу баалоолор классындагы эффективдүү баалоону тургузгула.

12.2. $X_1,...,X_n$ - чектүү биринчи моментүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Шарттуу математикалык күтүү $E(X_1 \mid \overline{X})$ ни тапкыла.

Чыгаруу. Тандалманын элементтери көз карандысыз жана бирдей бөлүштүрүлгөн. Ошондуктан $(X_i, \overline{X})$ түгөйүнүн бөлүштүрүлүшү $i \in \{1,...,n\}$ ден көз каранды болбойт. Анда, $E(X_1 \mid \overline{X}) = E(X_2 \mid \overline{X}) = ... = E(X_n \mid \overline{X})$. Суммалоо менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$E\{X_1 \mid \overline{X}\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\{X_i \mid \overline{X}\} = E(\overline{X} \mid \overline{X}) = \overline{X}.$$

12.3. $X_1,...,X_n$ - a орточолуу жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасынын фиксирленген маанисинде орточолоштуруу менен $a^* = X_1$ баалоосун жакшырткыла. Жакшырган баалоонун бөлүштүрүүсүн, математикалык күтүүсүн, жылышуусун жана дисперсиясын тапкыла. Бул баалоо эффективдүү болобу?

12.4. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ баалоосун $X_{(n)}$ статистикасы боюнча орточолоштуруу менен θ белгисиз параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

12.5. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. θ белгисиз параметринин θ^* баалоосунун жылышуусун жана дисперсиясын тапкыла. Толук жана жетиштүү $X_{(n)}$ статистикасынын фиксирленген маанисинде орточолоштуруу менен бул баалоону жакшырткыла. Жакшырган баалоонун жылышуусун жана дисперсиясын тапкыла. Бул баалоо эффективдүү болобу?

Чыгаруу. θ параметри үчүн $2X_1$ баалоосу жылышпас баалоо, ал эми $X_{(n)}$ статистикасы – жетиштүү жана толук баалоо болот. $X_{(n)} = u$ шартында X_1 чоңдугу $1/n$ ыктымалдыкта $X_{(n)}$ менен дал келет жана u га барабар болот. X_1 чоңдугу $(n-1)/n$ ыктымалдыкта $X_{(n)}$ менен дал келбейт жана $[0,u]$ кесиндисинде бир калыптагы бөлүштүрүүгө ээ болот. Ошондуктан $X_{(n)} = u$ шартында X_1 дин орточо мааниси

$$\frac{n}{u} + \frac{n-1}{n}\frac{u}{2} = \frac{n+1}{2n}u$$

га барабар. Ошентип,

$$E\{2X_1 \mid X_{(n)}\} = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$$

баалоосу жылышпас баалоолор классында эффективдүү болот.

12.6. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Белгисиз параметр $\tau(\theta,y) = P_\theta\{X_1 \geq y\}$ нун эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

12.7. Көлөмү $n \geq 2$ болгон тандалма боюнча көрсөткүчтүү бөлүштүрүүнүн α параметри үчүн эффективдүү жылышпас баалоону тапкыла.

12.8. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta-y}, & \textit{эгерде } y \geq \beta \\ 0, & \textit{эгерде } y < \beta \end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\beta \in R$ параметри үчүн эффективдүү жылышпас баалоону тапкыла.

12.9. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, & \textit{эгерде } y \geq \beta \\ 0, & \textit{эгерде } y < \beta \end{cases}, \ \alpha > 0, \beta \in R$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) эгерде α мааниси белгилүү болсо, β параметринин;

б) эгерде β мааниси белгилүү болсо, α параметринин;

в) $\theta = (\alpha, \beta)$ эки ченемдүү параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

12.10. $X_1,...,X_n$ - параметрлери β жана θ болгон Парето бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, β - белгилүү, болсун. θ параметри үчүн эффективдүү жылышпас баалоону тапкыла.

12.11. $X_1,...,X_n$ - параметрлери α жана θ болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, α - белгилүү, болсун. θ параметри үчүн $\overline{X^\alpha}$ нын толук жана жетиштүү статистика болоорун текшергиле. $\tau(\theta) = 1/\theta$ параметринин эффективдүү баалоосун тургузгула.

12.12. Кэптейн бөлүштүрүүсү

$$f_\theta(y) = \frac{g'(y)}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\theta-g((y))^2/2\sigma^2}$$

тыгыздыгы менен аныкталат, мында $g(y)$ - дифференцирленүүчү кемибөөчү функция.

а) эгерде σ мааниси белгилүү болсо, θ параметринин;

б) эгерде θ мааниси белгилүү болсо, σ параметринин эффективдүү жылышпас баалоону тапкыла.

12.13. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы $y \in (0,1)$ үчүн $\theta y^{\theta-1}$ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында $\theta > 0$. $\tau(\theta) = 1/\theta$ параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

12.14. $\overline{X}$ статистикасы боюнча кандайдыр бир жылышпас баалоону орточолоштуруу менен Бернулли бөлүштүрүүсүнүн p параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

Чыгаруу. $p^* = X_1$ жылышпас баалоосун алабыз жана $E\{p^* \mid \overline{X}\}$ ни эсептейбиз. 12.2-мисалдан $p^{**} = E\{p^* \mid \overline{X}\} = E\{X_1 \mid \overline{X}\} = \overline{X}$ га ээ болобуз. $\overline{X}$ статистикасы Бернулли бөлүштүрүүсүнүн p параметри үчүн толук жана жетиштүү статистика болгондуктан, алынган баалоо жылышпас баалоолор классындагы жалгыз эффективдүү баалоо болуп эсептелет.

12.15. $X_1,...,X_n$ - параметрлери m жана p, m-белгилүү, болгон биномиалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. p белгисиз параметринин

а) $p_n^* = X_1$; б) $p_n^* = X_1 / m$

баалоолорунун жылышуусун жана дисперсиясын тапкыла. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасынын фиксирленген маанисинде бул баалоону жакшырткыла. Жакшырган баалоонун жылышуусун жана дисперсиясын тапкыла. Бул баалоо эффективдүү болобу?

12.16. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассондук бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасынын фиксирленген маанисинде $\lambda_n^* = X_1$ баалоосун орточолоштуруу менен жакшырткыла. Жакшырган баалоонун жылышуусун жана дисперсиясын тапкыла. Бул баалоо эффективдүү болобу?

12.17. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассондук бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\theta = e^{-\lambda} = P_\lambda\{X_1 = 0\}$ параметринин баалоосу катары $\theta_n^* = I\{X_1 = 0\}$ саналат. Бул баалоонун $b_n(\theta) = E_\lambda \theta_n^* - \theta$ жылышуусун эсептегиле жана θ параметри үчүн толук жана жетиштүү болгон статистиканы орточолоштуруу менен жылышуусу $b_n(\theta)$ болгон баалоолор классындагы эффективдүү баалоосун тургузгула.

Чыгаруу. $b_n(\theta)=0$ го ээ болобуз. $n\overline{X}$ статистикасы толук жана жетиштүү. θ_n^* баалоосу 0 жана 1 деген маанилерди кабыл алаарын белгилеп өтөбүз. Ошондуктан

$$E_\lambda\{\theta_n^* \mid n\overline{X}=k\}=0\cdot P_\lambda\{\theta_n^*=0 \mid n\overline{X}=k\}+1\cdot P_\lambda\{\theta_n^*=1 \mid n\overline{X}=k\}$$
$$=P_\lambda\{X_1=0 \mid n\overline{X}=k\}.$$

Шарттуу ыктымалдыктын аныктоосу боюнча акыркы ыктымалдыкты эсептеп, $E_\lambda\{\theta_n^* \mid n\overline{X}=k\}=(1-1/n)^k$ га ээ болобуз. $\theta_n^{**}=(1-1/n)^{n\overline{X}}$ баалоосу жылышпас баалоолор классында эффективдүү.

12.18. $X_1,\dots,X_n,\ n\geq 2,$ - параметри $p\in(0,1)$ болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) $S=n\overline{X}$ статистикасы $P_p\{S=k\}=C_{n+k-1}^k p^n(1-p)^k,\ k=0,1,\dots$ бөлүштүрүүсүнө ээ экендигин ддалилдегиле.

б) $S=n\overline{X}$ статистикасы толук жана жетиштүү статистика болоорун далилдегиле.

в) $p_n^*=I\{X_1=0\}$ баалоосунун жылышуусун тапкыла. а) жана б) ны пайдаланып, мындай жылышууга ээ болгон класстагы жылышууну тапкыла.

12.19. $X_1,\dots,X_n$ - $\{1,\dots,\theta\}$ чектүү көптүгүндөгү бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында θ - бүтүн оң параметр.

$$\frac{X_{(n)}^{n+1}-(X_{(n)}-1)^{n+1}}{X_{(n)}^{n}-(X_{(n)}-1)^{n}}$$

статистикасынын θ параметри үчүн жылышпас баалоолор классында эффективдүү баалоосу болоорун далилдегиле.

12.20. θ_1^* жана θ_2^* лар - θ параметринин эки жылышпас эффективдүү баалоолору болушсун. $\theta_1^*=\theta_2^*$ ыктымалдыгы 1 ге барабардыгын далилдегиле. Көрсөтмө: $(\theta_1^*+\theta_2^*)/2$ баалоосун карагыла.

§13. Рао-Крамер барабарсыздыгы

$\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$ - R деги кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу доминирлөө шартын канаатандырган бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир параметрдик жыйыны болсун, б.а. бул параметрдик жыйын μ га салыштырмалуу абсолюттуу үзгүлтүксүз бөлүштүрүүлөрдөн турат. μ ченемине салыштырмалуу F_θ бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгын

$$f_\theta(x) = \frac{dF_\theta}{d\mu}(x)$$

деп белгилейбиз. $X_1, X_2, \ldots$ - F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма жана $\theta_n^* = \theta_n^*(X_1, \ldots, X_n)$ - θ параметринин $b_n(\theta) = E_\theta \theta_n^* - \theta$ жылышуусуна ээ болгон кандайдыр бир баалоосу болсун.

Төмөндөгү орун алат

Теорема (Рао-Крамер барабарсыздыгы). Төмөнкүдөй шарт аткарылсын: бардык y маанилери үчүн (μ ченеми боюнча) $\sqrt{f_\theta(y)}$ функциясы θ боюнча үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү жана

$$I(\theta) \equiv E\left(\frac{\partial \ln f_\theta(X_1)}{\partial \theta}\right)^2$$

Фишер маалыматы оң жана θ боюнча үзгүлтүксүз. Анда каалаган $\theta \in \Theta$ жана $n \geq 1$ үчүн төмөнкү барабарсыздык орун алат:

$$E_\theta(\theta_n^* - \theta)^2 \geq \frac{(1 + b_n^{'}(\theta))^2}{nI(\theta)} + b_n^2(\theta).$$

Эгерде θ_n^* баалоосу үчүн Рао-Крамер барабарсыздыгында төмөнкү чек ара табылса, анда θ_n^* баалоосу $b_n(\theta)$ жылышуусуна ээ болгон баалоолор классындагы R-эффективдүү баалоо деп аталат. $b_n(\theta)$ жылышуусуна ээ болгон баалоолор классындагы R-эффективдүү баалоо ушул эле класста зарыл түрдө эффективдүү болот.

13.1. Рао-Крамер барабарсыздыгынын жалпы формасында $(1 + b'(\theta))^2$ туюнтмасынын болушун сапаттык деңгээлде түшүндүргүлө. Бул процессте:

а) эмне үчүн $b(\cdot)$ эмес, $b'(\cdot)$ пайда болгондугун түшүндүргүлө;

б) эмне үчүн $b'(\cdot) = -1$ болгондо чек ара нөлгө айланышы керектигин түшүндүргүлө;

в) жогорудагы туюнтма эмне үчүн биринчи даражага эмес квадратка көтөрүлө тургандыгын түшүндүргүлө.

13.2. $X_1, \ldots, X_n$ - $F_\theta, \theta \in \Theta$ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Эгерде θ_n^* баалоосу θ үчүн $b_n(\theta) = \theta / n$ жылышуусуна ээ болгон баалоолор классындагы R-эффективдүү баалоо болсо, анда ал абалдуу экендигин далилдегиле. Жылышпас баалоолор классындагы эффективдүү баалоону тургузгула.

13.3. R - эффективдүү болбогон абалдуу баалоого мисал келтиргиле.

13.4. Бөлүштүрүүлөрдүн каалаган параметрдик жыйыны үчүн белгисиз θ параметринин θ_n^* баалоосу үчүн $D\theta_n^* \geq c/n$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай $c>0$ табылабы?

13.5. θ параметринен көз каранды болгон төмөнкүдөй бөлүштүрүүлөр жыйыны үчүн регулярдуулук шарттары аткарылабы:

а) орточосу θ жана дисперсиясы $\theta^2, \theta>0$ болгон нормалдуу бөлүштүрүү;

б) $[\theta, \theta+1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүү;

в) $[-\theta, 0], \theta>0$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүү;

г) $y>0$ болгондо тыгыздыгы $\theta e^{-\theta y}$ болгон бөлүштүрүү;

д) $y<-\theta$ болгондо тыгыздыгы $e^{\theta+y}$ болгон бөлүштүрүү;

е) параметрлери 5 жана $\theta, 0<\theta<1$ болгон биномиалдуу бөлүштүрүү;

ж) параметри $\theta, \theta>0$ болгон Пуассондун бөлүштүрүүсү;

з) $y \geq \theta, \theta>1$болгондо бөлүштүрүү функциясы $F_\theta(y)=1-\theta/y$ болгон бөлүштүрүү;

и) тыгыздыгы $4(\theta-y)^3/\theta^4$ болгон $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бөлүштүрүү.

13.6. Нормалдуу бөлүштүрүүнүн a орточо маанисинин максималдуу чындыкка жакындык баалоосу R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

Чыгаруу. $\overline{X}$ жылышпас баалоосунун a параметринен орточо квадраттык четтөөсү σ^2/n ге барабар. Фишер маалыматын эсептейбиз:

$$I(a)=E_a\left(\frac{\partial}{\partial a}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(X_1-a)^2/2\sigma^2}\right)\right)^2$$

$$=E_a\left(\frac{\partial}{\partial a}(X_1-a)^2/2\sigma^2\right)^2=E_a(X_1-a)^2/\sigma^4=1/\sigma^2.$$

Анда, Рао-Крамердин барабарсыздыгынын оң жагы σ^2/n көрүнүшүнө ээ болот жана $\overline{X}$ баалоосунун орточо квадраттык четтөөсү менен дал келет. $\overline{X}$ баалоосу R-эффективдүү баалоо болот.

13.7. Нөлдүк орточолуу нормалдуу бөлүштүрүүнүн σ^2 дисперсиясынын

а) максималдуу чындыкка жакындык баалоосу

б) S_0^2 баалooосу

R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

13.8. $X_1, \ldots, X_{3n}$ - a орточолуу жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган $3n$ көлөмдүү тандалма болсун. a параметринин төмөнкү баалоолору R-эффективдүү (эффективдүү) баалоо болобу:

а) $\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} X_i$;   б) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{3i}$;   в) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?

13.9. $X_1,...,X_n$ - эки нормалдуу бөлүштүрүүнүн аралашмасынан турган бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, тагыраак айтканда орточосу a жана дисперсиясы 1 болгон нормалдуу бөлүштүрүү 92% ин, ал эми 8% ин орточосу a жана дисперсиясы 16 болгон нормалдуу бөлүштүрүү түзүп турат. Тандалма орточосу a параметри үчүн R-эффективдүү баалоо болобу?

13.10. $X_1,...,X_n,\ n \geq 2$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

$$\alpha_n^* = \frac{n-1}{n\overline{X}}$$

баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу?

13.11. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, & \textit{эгерде } y \geq \beta \\ 0, & \textit{эгерде } y < \beta \end{cases}, \ \alpha > 0, \beta \in R$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма жана β белгилүү, болсун. α параметри үчүн моменттер методундагы баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу? Эффективдүүчү?

13.12. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, & \textit{эгерде } y \geq \beta \\ 0, & \textit{эгерде } y < \beta \end{cases}, \ \alpha > 0, \beta \in R$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма жана α белгилүү болсун. β параметри үчүн моменттер методундагы баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу? Эффективдүүчү? β параметри үчүн максималдуу чындыкка жакындык баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу? Эффективдүүчү?

13.13. $X_1,...,X_n$ - $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\theta^* = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу? Бул баалоо эффективдүү болобу?

13.14. $X_1,...,X_n$ - $[\theta,\theta+1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

$$\theta^* = X_{(1)} - (n+1)^{-1}$$

баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу?

13.15. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_\theta(y) = \frac{e^{\theta-y}}{(1+e^{\theta-y})^2}, \ y \in R$$

болгон логистикалык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) θ параметри үчүн $\overline{X}$ жылышпас баалоо болооорун текшергиле.

б) $\overline{X}$ баалоосунун θ параметринен орточо квадраттык четтөөсүн тапкыла. Көрсөтмө:

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+e^y} dy = \frac{\pi^2}{12}$$

барабардыгын пайдалангыла.

в) Фишердин маалыматын тапкыла.

г) $\overline{X}$ баалоосунун R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

13.16. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы $\theta y^{\theta-1}, y \in [0,1], \theta > 0$ болгон бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $-\overline{\ln X}$ баалоосу жылышпас баалоолор классында $\tau = 1/\theta$ үчүн R-эффективдүү баалоо болоорун далилдегиле.

13.17. $X_1,...,X_n$ - параметрлери α жана θ болгон Вейбуллдун бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма жана α мааниси белгилүү болсун. $\overline{X^\alpha}$ баалоосу жылышпас баалоолор классында $\tau = 1/\theta$ үчүн R-эффективдүү баалоо болоорун далилдегиле.

13.18. $X_1,...,X_n$ - жылышуу параметри a болгон Коши бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Тандалма медианасынын a параметринин баалоосу катары R-эффективдүүлүгүн изилдегиле.

Чыгаруу. 7.36-мисалдан төмөнкү келип чыгат: тандалма медианасы Коши бөлүштүрүүсүнүн a медианасы үчүн асимптотикалык нормалдуулук коэффициенти $\pi^2/4$ болгон асимптотикалык нормалдуу баалоо болот. Фату леммасы боюнча

$$\liminf_{n\to\infty} nD\varsigma^* \geq \pi^2/4.$$

Фишердин маалыматы төмөнкүгө барабар болот:

$$I(a) = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt = 1/2.$$

$\pi^2/4 > 2$ болгондуктан, ς^* жок дегенде жетишээрлик чоң n маанилери үчүн R-эффективдүү баалоо болбойт.

13.19. F – нөлдүк орточо мааниге жана $f(y)$ тыгызыдыгына ээ болгон бөлүштүрүү жана $f(y)$ – дифференцирленүүчү жуп функция болсун. Тыгыздыгы $f(y-\theta), \theta \in R$ болгон F_θ бөлүштүрүүсүн карайбыз. Тандалма мединасынын θ жылышуу параметри үчүн R-эффективдүү баалоо боло албай тургандыгын далилдегиле.

13.20. Бернулли бөлүштүрүүсүнүн p параметринин максималдуу чындыкка жакын баалоосу R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

Чыгаруу. $\overline{X}$ жылышпас баалоосунун p параметринен орточо квадраттык четтөөсү $p(1-p)/n$ ге барабар. Фишердин маалыматын эсептейбиз:

$$I(p)=E_p\left(\frac{\partial}{\partial p}\ln p^{X_1}(1-p)^{1-X_1}\right)^2$$

$$=E_p\left(\frac{\partial}{\partial p}(X_1\ln p+(1-X_1)\ln(1-p))\right)^2$$

$$=\frac{1}{p^2}E_pX_1+\frac{1}{(1-p)^2}E_p(1-X_1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p(1-p)}.$$

Рао-Крамер барабарсыздыгынын оң жагы $p(1-p)/n$ көрүнүшүндө жана $\overline{X}$ баалоосунун орточо квадраттык четтөөсү менен дал келет. Анда $\overline{X}$ баалоосу R-эффективдүү болуп саналат.

13.21. Параметрлери m жана p, m мааниси белгилүү, болгон биномиалдык бөлүштүрүүнүн p параметринин максималдык чындыкка жакын баалоосу R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

13.22. Пуассон бөлүштүрүүсүнүн λ параметринин максималдык чындыкка жакын баалоосу R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

13.23. $X_1,\dots,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\theta=e^{-\lambda}$ параметринин баалоосу катары $\theta_n^*=\overline{I\{X=0\}}$ статистикасы каралат. Бул баалоонун $b_n(\theta)=E\theta_n^*-\theta$ жылышуусун эсептегиле жана анын R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

13.24. $X_1,\dots,X_n$ – параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\tau=1/p$ параметринин $\tau_n^*=1+\overline{X}$ баалоосу R-эффективдүү баалоо болобу?

13.25. $X_1,\dots,X_n$ – $\theta\in(0,1/3)$ параметринен көз каранды болгон төмөнкүдөй үч чекиттүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун:

$$P_\theta\{X_1=1\}=\theta,\ P_\theta\{X_1=2\}=2\theta,\ P_\theta\{X_1=3\}=1-3\theta.$$

θ параметринин максималдуу чындыкка жакын баалоосу R-эффективдүү баалоо болоорун текшергиле.

Чыгаруу. 4.28-мисалда

$$Y_i=\begin{cases}1, \text{ эгерде } X_i\neq 3,\\ 0, \text{ эгерде } X_i=3\end{cases}$$

болгондо θ_n^* максималдуу чындыкка жакын баалоосу табылган. ($\{1,2,3\}$ көптүгүндөгү) эсептелүүчү ченемге салыштырмалуу $f_\theta(y)$ тыгыздыгы төмөнкүгө барабар:

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \theta, & y = 1 \text{ болгондо}, \\ 2\theta, & y = 2 \text{ болгондо}, \\ 1-3\theta, & y = 3 \text{ болгондо}. \end{cases}$$

Бул жыйын үчүн регулярдуулук шарты аткарылат. Фишердин маалыматын эсептейбиз:

$$I(p) = E_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(X_1)\right)^2$$

$$= \theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\theta\right)^2 + 2\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln 2\theta\right)^2 + (1-3\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(1-3\theta)\right)^2$$

$$= \frac{3}{\theta(1-3\theta)}.$$

θ_n^* жылышпас баалоосунун дисперсиясы $D\theta_n^* = 3\theta(1-3\theta)/9n$ ге барабар. Рао-Крамер барабарсыздыгында барабардык аткарылат. Ошондуктан θ^* баалоосу R-эффективдүү жана эффективдүү баалоо болуп саналат.

13.26. Эгерде $f_\theta(X_1,...,X_n)$ чындыкка жакындык функциясын $f_\theta(X_1,...,X_n) = e^{A(\theta)T(X_1,...,X_n)+B(\theta)}h(X_1,...,X_n)$ көрүнүшүндө көрсөтүүгө мүмкүн болсо, анда $\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$ бөлүштүрүүлөр жыйыны экспоненциалдык деп аталат. Төмөндөгү жыйындар экспоненциалдык боло алышабы:

а) эгерде σ^2 мааниси белгилүү болсо, анда параметрлери a жана σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүлөр;

б) эгерде a мааниси белгилүү болсо, анда параметрлери a жана σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүлөр;

в) эгерде λ мааниси белгилүү болсо, анда параметрлери α жана λ болгон Γ-бөлүштүрүүлөр;

г) эгерде α мааниси белгилүү болсо, анда параметрлери α жана λ болгон Γ-бөлүштүрүүлөр;

д) параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүлөрү;

е) параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүлөрү;

ж) $[a,b]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүлөр?

13.27. $X_1,...,X_n$ - экспоненциалдык жыйындан алынган тандалма болсун, $A(\theta)$ жана $B(\theta)$ функциялары үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болушсун. Анда $\theta_n^* = T(X_1,...,X_n)$ баалоосу үчүн Рао-Крамер барабарсыздыгында барабардык аткарыла тургандыгын далилдегиле.

Бешинчи бөлүм
Ишенимдүү баалоолор

§14. Ишенимдүү интервалдар

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир жыйыны, $\Theta \subseteq R$, жана $X_1,...,X_n$ - бул F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

$\theta_n^- = \theta_n^-(X_1,...,X_n)$ жана $\theta_n^+ = \theta_n^+(X_1,...,X_n)$ - булар кандайдыр бир статистикалар болушсун. Эгерде

$$P_\theta\{\theta \in (\theta_n^-, \theta_n^+)\} \geq 1-\varepsilon$$

болсо, анда (θ_n^-, θ_n^+) кокустук интервалы $1-\varepsilon$ *деңгээлдүү ишенимдүү интервал* деп аталат.

Эгерде бардык θ үчүн

$$P_\theta\{\theta \in (\theta_n^-, \theta_n^+)\} = 1-\varepsilon$$

болсо, анда (θ_n^-, θ_n^+) кокустук интервалы $1-\varepsilon$ *деңгээлдүү так ишенимдүү интервал* деп аталат.

Так ишенимдүү интервалды тургузуу үчүн көп учурда төмөнкү ыкманы пайдаланышат. $P_\theta\{G(X_1,...,X_n,\theta) \in \cdot\}$ бөлүштүрүүсү θ параметринен көз каранды болбогондой (бөлүштүрүү θ параметринен *эркин* болгон) $G(x_1,...,x_n,\theta)$ функциясы тандалат. G функциясы $X_1,...,X_n$ тандалмасынын каалагандай бекемделген маанилеринде θ аргументине тескери жана монотондуу функция болушу керек. Аныктык үчүн G өсүүчү функция болсун. $t(X_1,...,X_n,y)$ аркылуу θ параметри боюнча $G(X_1,...,X_n,\theta)$ функциясына тескери болгон функцияны белгилейбиз. Анда $1-\varepsilon$ деңгээлиндеги ишенимдүү интервал

$$(t(X_1,...,X_n,y^-), t(X_1,...,X_n,y^+))$$

көрүнүшүндө болот, мында y^- жана y^+ сандары

$$P_\theta\{y^- < G(X_1,...,X_n,\theta) < y^+\} = 1-\varepsilon$$

теңдемесинен табылат.

14.1. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2, мында σ^2 мааниси белгилүү, болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда a үчүн так ишенимдүү интервалды тургузгула.

14.2. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2, мында a мааниси белгилүү, болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Анда $S_1^2 = \overline{(X-a)^2}$ статистикасын пайдаланып, σ^2 үчүн так ишенимдүү интервалды тургузгула.

14.3. Мурдагы маселенин шартында $\left|\overline{X}-a\right|$ статистикасын пайдаланып, σ^2 үчүн так ишенимдүү интервалды тургузгула. Алынган ишенимдүү интервалдардын кайсынысы маанилүүрөөк?

Чыгаруу. $\sqrt{n}\left|\overline{X}-a\right|/\sqrt{\sigma^2}$ кокустук чоңдугу $|\xi|$ катары бөлүштүрүлгөн, мында ξ нормалдуу стандарттуу бөлүштүрүүгө ээ. ς_δ - бул нормалдуу стандарттуу бөлүштүрүүнүн δ деңгээлиндеги квантили болсун. Анда

$$P\{\zeta_{0,5+\varepsilon/4}<|\xi|<\zeta_{1-\varepsilon/4}\}=1-\varepsilon$$

жана $1-\varepsilon$ деңгээлиндеги изделүүчү так ишенимдүү интервал төмөнкү катыштардан табылат:

$$P\left\{\zeta_{0,5+\varepsilon/4}<\sqrt{n}\frac{\left|\overline{X}-a\right|}{\sqrt{\sigma^2}}<\zeta_{1-\varepsilon/4}\right\}=P\left\{\frac{n(\overline{X}-a)^2}{\zeta^2_{1-\varepsilon/4}}<\sigma^2<\frac{n(\overline{X}-a)^2}{\zeta^2_{0,5+\varepsilon/4}}\right\}.$$

Алынган интервалдын оң жана сол жаккы чек араларынын бөлүштүрүүлөрү n ден көз каранды эмес:

$$\left(\frac{n(\overline{X}-a)^2}{\zeta^2_{1-\varepsilon/4}},\frac{n(\overline{X}-a)^2}{\zeta^2_{0,5+\varepsilon/4}}\right)=\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{\zeta^2_{1-\varepsilon/4}},\frac{\sigma^2\xi^2}{\zeta^2_{0,5+\varepsilon/4}}\right).$$

Ошондуктан мурдагы мисалда алынган ишенимдүү интервал манилүүрөөк: n өскөн сайын анын узундугу нөлгө умтулушу ыктымал.

Чындыгында, λ_δ - бул n эркин даражалуу χ^2 бөлүштүрүүсүнүн δ деңгээлиндеги квантили болсун. Анда $(nS_1^2/\lambda_{1-\varepsilon/2}, nS_1^2/\lambda_{\varepsilon/2})$ интервалы σ^2 үчүн ишенимдүү деңгээли $1-\varepsilon$ болгон так ишенимдүү интервал болуп саналат. Борбордук пределдик теорема боюнча $\lambda_\delta=n+\varsigma_\delta\sqrt{n}+o(\sqrt{n})$ жана n өскөн сайын интервалдын эки чек арасы тең σ^2 ка умтулушат.

14.4. X_1,X_2 - орточосу 2 жана дисперсиясы 3 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган, көлөмү 2 болгон тандалма болсун. X_1-cX_2 жана X_1+X_2 кокустук чоңдуктары көз карандысыз боло тургандай c санын көрсөткүлө.

14.5. X_1,X_2 - орточосу 1 жана дисперсиясы 2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган, көлөмү 2 болгон тандалма болсун. $S_1=X_1+X_2$ жана $S_2=X_1{}^2+X_2{}^2$ деп белгилейбиз. S_1 жана $cS_2-S_1^2$ кокустук чоңдуктары көз карандысыз боло тургандай c санын көрсөткүлө.

14.6. X_1,X_2 - орточосу 0 жана дисперсиясы 5 нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган, көлөмү 2 болгон тандалма болсун. $|X_1-2X_2|$ жана $(cX_1+X_2)^3$ чоңдуктары көз карандысыз боло тургандай c санын көрсөткүлө.

14.7. Нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча a орточосу жана σ^2 дисперсиясы үчүн так ишенимдүү интервалдарды тургузгула.

14.8. Орточосу $\theta > 0$ жана дисперсиясы θ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча θ параметри үчүн ишенимдүү деңгээли $1-\varepsilon$ болгон так ишенимдүү интервалды тургузгула.

Чыгаруу. $\sqrt{n}|\overline{X}|/\theta$ чоңдугу $|\xi|$ катары бөлүштүрүлгөн, мында ξ орточосу n жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. ς_δ - бул $|\xi|$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүсүнүн δ деңгээлиндеги квантили болсун, б.а. $P\{|\xi| < \zeta_\delta\} = \delta$. Анда изделүүчү ишенимдүү интервал $(\sqrt{n}|\overline{X}|/\zeta_{1-\varepsilon/2}, \sqrt{n}|\overline{X}|/\zeta_{\varepsilon/2})$ ге барабар.

14.9. Математикалык күтүүсү жана дисперсиясы белгисиз болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган, көлөмү 3 болгон тандалма берилген. Жылышпас тандалма дисперсиясы 1 ге барабар. Таблицаларды колдонбой, белгисиз дисперсия үчүн $0{,}9$ деңгээлдеги так ишенимдүү интервалды тургузгула.

14.10. $X_1, \ldots, X_n$ - бул $[0, \theta)$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында $\theta \in (0,1]$.

а) $2\overline{X}$ баалоосунун б) $X_{(n)}$ баалоосунун

жардамында Чебышев барабарсыздыгын пайдаланып θ үчүн ишенимдүү интервалды тургузгула.

14.11. X_1 статистикасынын жардамында $[0, \theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган көлөмү 1 болгон тандалма боюнча θ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү так ишенимдүү интервалды тургузгула.

14.12. $X_1, \ldots, X_n$ - бул $[0, \theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $X_{(n)}$ статистикасынын жардамында θ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү так ишенимдүү интервалды тургузгула.

Чыгаруу. $Y_i = X_i / \theta, i = 1, \ldots, n,$ - бул $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган көлөмү n болгон тандалма болсун. $Y_{(n)} = X_{(n)} / \theta$ кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүсү θ дан көз каранды эмес. $P\{\psi < Y_{(n)} < 1\} = 1 - \varepsilon$ аткарыла тургандай $\psi \in (0,1)$ ни табабыз. $Y_{(n)}$ максималдуу ирээттелген статистикасынын бөлүштүрүү функциясы $0 < y < 1$ үчүн $F(y) = y^n$ ге барабар. Ошондуктан $1 - \psi^n = 1 - \varepsilon$ жана, тиешелеш түрдө, $\psi = \sqrt[n]{\varepsilon}$.

θ үчүн ишенимдүү интервалды төмөнкү катыштан алабыз:

$$1 - \varepsilon = P\{\psi < X_{(n)} / \theta < 1\} = P\{X_{(n)} < \theta < X_{(n)} / \psi\}.$$

Изделүүчү ишенимдүү интервал $(X_{(n)}, X_{(n)}/\sqrt[n]{\varepsilon})$ го барабар.

14.13. $X_1,\dots,X_n$ - бул $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган n көлөмдүү тандалма болсун. $1-\varepsilon$ деңгээлдүү так ишенимдүү интервал катары $(X_{(n-1)}, X_{(n-1)}/\psi)$ интервалын алууга мүмкүн экендигин көрсөткүлө, мында ψ төмөнкү теңдемеден табылат:

$$\psi^{n-1}(n-(n-1)\psi)=\varepsilon.$$

14.14. $X_{(1)}$ баалоосунун жардамында

а) $[\theta,\theta+1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн;

б) $[\theta,2\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган n көлөмдүү тандалма боюнча θ параметри үчүн так ишенимдүү интервалды тургузугула.

14.15. $X_{(1)}$ баалоосунун жардамында жылышуу параметри β болгон жылышуучу көрсчөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган n көлөмдүү тандалма боюнча β параметри үчүн так ишенимдүү интервалды тургузугула.

14.16. $X_1,\dots,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $S_1(\overline{X})=X_1$ жана $S_2(\overline{X})=X_1$ статистикаларын пайдаланып, α параметри үчүн так ишенимдүү интервалдарды тургузгула.

§15. Асимптотикалык ишенимдүү интервалдар

Эгерде бардык θ үчүн

$$\liminf_{n\to\infty} P_\theta\{\theta\in(\theta_n^-,\theta_n^+)\}\ge 1-\varepsilon$$

болсо, анда (θ_n^-,θ_n^+) кокустук интервалы $1-\varepsilon$ *деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервал* деп аталат.

Эгерде бардык θ үчүн

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{\theta\in(\theta_n^-,\theta_n^+)\}=1-\varepsilon$$

болсо, анда (θ_n^-,θ_n^+) кокустук интервалы $1-\varepsilon$ *деңгээлдүү так асимптотикалык ишенимдүү интервал* деп аталат.

15.1. $\overline{X}$ баалоосунун жардамында Бернулли бөлүштүрүүсүнүн белгисиз p параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

Чыгаруу. Борбордук пределдик теорема боюнча

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

кокустук чоңдугунун бөлүштүрүүсү стандарттуу нормалдуу законго жай жыйналат, ал эми $\overline{X}$ чоңдугу p га жыйналышы ыктымал. Ошондуктан

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X}}}$$

чоңдугу да стандарттуу нормалдуу законго жай жыйналат. Анда, эгерде $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили болсо,

$$\left(\overline{X}-\frac{\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X}}}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X}}}{\sqrt{n}}\right)$$

кокустук интервалы $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервал болот.

15.2. Текшерүүлөрдүн натыйжасында 400 электр лампочкасынын 40 даанасы жараксыз деп табылды. Жараксыз болуу ыктымалдыгы үчүн 0,99 деңгээлдүү ишенимдүү интервалды тапкыла.

15.3. $\overline{X}$ баалоосунун жардамында биномиалдык бөлүштүрүүнүн белгисиз p параметри үчүн (m параметринин мааниси белгилүү) $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.4. $\overline{X}$ баалоосунун жардамында Пуассон бөлүштүрүүсүнүн белгисиз λ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.5. $\overline{X}$ баалоосунун жардамында геометриялык бөлүштүрүүнүн p параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.6. $X_1,...,X_n$ - чектүү дисперсиялуу F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма, $E_\theta X_1=\theta$ жана $D_\theta X_1=\sigma^2(\theta)$ болсун, мында $\sigma(\theta)$ - бул θ боюнча үзгүлтүксүз функция. $\overline{X}$ баалоосунун жардамында θ үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.7. θ_n^* - бул θ параметринин $\sigma^2(\theta)$ коэффициенттүү асимптотикалык нормалдуу баалоосу болсун, мында $\sigma(\theta)$ - бул θ боюнча үзгүлтүксүз функция. $\overline{X}$ баалоосунун жардамында θ үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.8. $X_1,...,X_n$ - бул $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. 1.28-мисалдын жыйынтыгын пайдаланып $X_{(n)}$ баалоосунун жардамында θ үчүн асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.9. $X_1,...,X_n$ - бул $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\theta_1^* = 2\overline{X}$ жана $\theta_2^* = \sqrt{3\overline{X^2}}$ асимптотикалык нормалдуу баалоолорунуни жардамында θ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалдарды тургузгула жана экинчи интервал биринчисине караганда асмиптотикалык кыска экендигин көрсөткүлө.

15.10. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\alpha_1^* = 1/\overline{X}$ жана $\alpha_2^* = \sqrt{2/\overline{X^2}}$ асимптотикалык нормалдуу баалоолорунун жардамында α параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалдарды тургузгула жана биринчи интервал экинчисине караганда асмиптотикалык кыска экендигин көрсөткүлө.

15.11. $X_1,...,X_n$ - жылышуу параметри β болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ статистикасынын жардамында β параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула. Алынган интервалды 14.15-мисалдагы ишенимдүү интервал менен салыштыргыла. Бул интервалдардын кайсынысы маанилүүрөөк?

15.12. Параметрлери β жана θ болгон Парето бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма берилген. 7.22-мисалдын жыйынтыгын пайдаланып, β үчүн асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.13. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2, σ^2 мааниси белгилүү, болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Тандалма медианасын пайдаланып a үчүн асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула. Алынган интервалды тандалманын орточо мааниси боюнча тургузулган так ишенимдүү интервал менен салыштыргыла.

15.14. $X_1,...,X_n$ - жылышуу параметри a болгон Коши бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Тандалма медианасын пайдаланып a үчүн асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

15.15. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2, a мааниси белгилүү, болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\sqrt{\pi/2}\cdot\overline{|X-a|}$ статистикасын пайдаланып σ^2 үчүн асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула. Алынган интервалды тандалма дисперсия боюнча тургузулган так ишенимдүү интервал менен салыштыргыла.

Чыгаруу. $\sigma_n^* = \sqrt{\pi/2}\cdot\overline{|X-a|}$ баалоосу $\sigma^2(\pi/2-1)$ коэффициентүү σ үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болуп саналат (7.10-

мисалды кара). Ошондуктан $(\sigma_n^*)^2=(\pi/2)(\overline{|X-a|})^2$ баалоосу $4\sigma^4(\pi/2-1)$ коэффициентүү σ^2 үчүн асимптотикалык нормалдуу баалоо болот. Мындан σ^2 үчүн төмөнкү асимптотикалык ишенимдүү интервалга ээ болобуз:

$$\left(\sigma_n^* - \frac{2(\sigma_n^*)\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\pi/2-1}}{\sqrt{n}}, \sigma_n^* + \frac{2(\sigma_n^*)\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\pi/2-1}}{\sqrt{n}}\right),$$

мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. Анын узундугу $\frac{4\sigma^2\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\pi/2-1}}{\sqrt{n}}$ тартибине ээ.

Так ишенимдүү интервалдын узундугу

$$\frac{nS_1^2}{n-\sqrt{n}\zeta_{1-\varepsilon/2}+o(\sqrt{n})} - \frac{nS_1^2}{n+\sqrt{n}\zeta_{1-\varepsilon/2}+o(\sqrt{n})}$$

ге барабар, бул болсо $\frac{2\sigma^2\zeta_{1-\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}$ тартибиндеги чоңдук. Ошентип так ишенимдүү интервал асимптотикалык кыска болот.

Алтынчы бөлүм
Гипотезаларды текшерүү

§16. Эки жөнөкөй гипотезаны ажыратуу: негизги түшүнүктөр

$X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин. Мындан сырткары F_1,F_2 эки бөлүштүрүүсү жана тандалманын бөлүштүрүлүшү жөнүндөгү H_1, H_2 эки жөнөкөй гипотезасы берилсин: H_j - тандалма $F_j, j=1,2$ бөлүштүрүүсүнөн алынды деген гипотеза. H_1 гипотезасы негизги деп, ал эми H_2 гипотезасы альтернативдик деп аталат.

Борель боюнча өлчөнүүчү каалаган $\delta : R^n \to \{0,1\}$ чагылтуусу *рандомизирленбеген критерий* деп аталат. Эгерде $\delta(X_1,...,X_n)=1$ болсо, анда негизги гипотеза четке кагылып, альтернативдик гипотеза кабыл алынат; эгерде $\delta(X_1,...,X_n)=0$ болсо, анда негизги гипотеза кабыл алынат.

Борель боюнча өлчөнүүчү каалаган $\delta : R^n \to [0,1]$ чагылтуусу *рандомизирленген критерий* деп аталат. $\delta(X_1,...,X_n)$ чоңдугу негизги гипотезаны четке кагуу ыктымалдыгы катары мааниге ээ болот.

$\alpha_j = P_{H_j}\{H_j \text{ гипотезасы четке кагылат}\}$ ыктымалдыгы рандомизирленбеген δ критерийинин j-түрдөгү каталык ыктымалдыгы деп аталат, мында P_{H_j} ыктымалдыгы $X_1,...,X_n$ тандалмасы F_j бөлүштүрүүсүнөн алынды деген болжолдоодо эсептелет.

$\alpha_1 = E_{H_1}\delta(X_1,...,X_n)$ математикалык күтүүсү рандомизирленген δ критерийинин *биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы* деп аталат, ал эми $\alpha_2 = 1 - E_{H_2}\delta(X_1,...,X_n)$ чоңдугу *экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы* деп аталат.

Биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгын критерий *ченеми* деп да аташат жана $\alpha(\delta)$ деп белгилешет, ал эми $1-\alpha_2(\delta)$ ны критерий *кубаттуулугу* деп аташат жана $\beta(\delta)$ деп белгилешет.

Эгерде тандалма көлөмүнүн өсүүсү менен критерий кубаттуулугу 1 ге умтулса, анда критерий *абалдуу* деп аталат.

16.1. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $a=1$ альтернативасына каршы болгон $a=0$ негизги гипотезасын текшерүү үчүн төмөнкү критерий колдонулат: эгерде $X_{(n)} < 3$ болсо, негизги гипотеза кабыл алынат, тескери учурда четке кагылат. Биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарын тапкыла.

Чыгаруу. Төмөнкү барабардыктарга ээ болобуз

$$\alpha_1 = P_{H_1}\{H_1 \textit{ гипотезасы четке кагылат}\} = P_{H_1}\{X_{(n)} \geq 3\}$$

$$= 1 - P_{H_1}\{X_{(n)} < 3\} = 1 - \left(P_{H_1}\{X_1 < 3\}\right)^n = 1 - (1 - \overline{\Phi}(3))^n$$

жана

$$\alpha_2 = P_{H_2}\{H_1 \textit{ гипотезасы кабыл алынат}\} = P_{H_2}\{X_{(n)} < 3\}$$

$$= (P_{H_2}\{X_1 < 3\})^n = \left(P_{H_2}\{X_1 - 1 < 2\}\right)^n = (1 - \overline{\Phi}(2))^n.$$

16.2. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Эки жөнөкөй гипотезаны карайбыз: $a = -1$ негизги гипотезасы жана $a = 0$ альтернативдик гипотеза. Бул гипотезаларды текшерүү үчүн төмөнкү статистикалык критерий сунуш кылынат: эгерде $\overline{X} < -n^{\gamma}$ болсо, анда негизги гипотеза кабыл алынат, тескери учурда альтернативдүү гипотеза кабыл алынат. Мында γ - алдын-ала тандалып алынган бүтүн сан. Критерий абалдуу боло тургандай бардык γ сандарын аныктагыла.

16.3. Эки гипотеза берилген: негизги гипотеза боюнча тандалманын элементтери нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ, ал эми альтернативдүү гипотеза боюнча тандалманын элементтери Пуассондук бөлүштүрүүгө ээ. Биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктары нөлгө барабар болгон критерийди тургузгула.

16.4. $X_1,...,X_n$ - бул бөлүштүрүү тыгыздыгы жөнүндө эки гипотеза айтылган тандалма болсун. H_1 гипотезасы боюнча X_i тыгыздыгы

$$f_1(y) = \begin{cases} e^{-(y-6)}, & y \geq 6 \\ 0, & y < 6 \end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүгө ээ, ал эми альтернативдүү гипотеза боюнча X_i тыгыздыгы

$$f_2(y) = \begin{cases} 2e^{-2(y-3)}, & y \geq 3 \\ 0, & y < 3 \end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүгө ээ. Төмөнкү критерийлердин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын $n \to \infty$ пределдерин тапкыла:

а) $\overline{X} > 3{,}5 + 1/\sqrt{n}$; б) $\overline{X} > 3{,}5 + 1/n$; в) $\overline{X} > 3{,}5$.

16.5. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. Эки жөнөкөй гипотезаны карайбыз: $\lambda = 1$ жана $\lambda = 3$. δ критерийи боюнча $X_{(n)} \leq 1$ болгондо биринчи гипотеза, тескери учурда альтернативдүү гипотеза кабыл алынат. Бул критерийдин кубаттуулугу берилген γ маанисинен чоң боло тургандай тандалманын минималдуу ченемин тапкыла.

16.6. Негизги гипотеза боюнча берилген адам телепатикалык жөндөмдүүлүктөрдөн ажыратылган жана ар бир экспериментте аралыктан ойду табуу ыктымалдыгы 1/2 ге барабар. Эгерде аралыктан ойду табуу боюнча жүргүзүлгөн бир типтүү көз карандысыз 100 эксперименттин 70 тен аз эмеси ийгиликтүү аяктаса, анда берилген адамдын телепатикалык жөндөмдүүлүгү бар деген гипотеза кабыл алынат. Телепатикалык жөндөмдүүлүктөрү жок адамды телепат деп табуу ыктымалдыгы эмнеге барабар?

§17. Байестик жана минимакстык критерийлер

$X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин. Мындан сырткары k сандагы $F_1,...,F_k$ бөлүштүрүүлөрү жана тандалманын бөлүштүрүлүшү жөнүндөгү k сандагы $H_1,...,H_k$ жөнөкөй бөлүштүрүүлөрү берилсин, мында H_j - бул тандалма F_j, $j=1,2,...,k$, бөлүштүрүүсүнөн алынды деген гипотеза.

Каалаган $(x_1,...,x_n)\in R^n$ үчүн $\delta_j(x_1,...,x_n)$ маанилеринин (j боюнча) бири гана 1 ге, ал эми калгандары 0 го барабар боло тургандай $\delta=(\delta_1,...,\delta_k):R^n\to\{0,1\}^k$ чагылтуусу *рандомизирленбеген критерий* деп аталат. Эгерде $\delta_j=1$ болсо, анда H_j гипотезасы кабыл алынат.

Каалаган $(x_1,...,x_n)\in R^n$ үчүн $\sum_{i=1}^{k}\delta_j(x_1,...,x_n)=1$ барабардыгы аткарылган $\delta=(\delta_1,...,\delta_k):R^n\to[0,1]^k$ чагылтуусу *рандомизирленген критерий* деп аталат. δ_j маанилери H_j гипотезасын кабыл алуу ыктымалдыгы катары эсептелет.

$\alpha_j(\delta)=P_{H_j}\{\delta_j(X_1,...,X_n)=0\}$ ыктымалдыгы δ рандомизирленбеген критерийинин *j-түрдөгү каталык ыктымалдыгы* деп аталат.

$\alpha_j(\delta)=1-E_{H_j}\delta_j(X_1,...,X_n)$ математикалык күтүүсү δ рандомизирленген критерийинин *j-түрдөгү каталык ыктымалдыгы* деп аталат.

Байестик ыкма. Бул ыкма боюнча тандалма алынган F_j бөлүштүрүүсү кокусунан тандалып алынат. Бул учурда H_j гипотезалары кокустук окуялар болушат; бул окуялардын белгилүү ыктымалдыктарын

$$P\{H_j\}=q_j$$

деп белгилейбиз. $q=(q_1,...,q_k)$ гипотезалар көптүгүндө априордук бөлүштүрүү болот. δ критерийинин каталыгынан орточо ыктымалдыгын аныктайбыз:

$$\alpha(\delta)=\sum_{j=1}^{k} q_j \alpha_j(\delta).$$

Эгерде δ_q критерийи каталыктын минималдуу орточо ыктымалдыгына ээ болсо, анда ал *байестик* критерий деп аталат.

R деги кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу доминирлөө шарты аткарылсын. $f_j(y)$ менен μ ченемине салыштырмалуу F_j бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгын белгилейли. Анда төмөнкү теорема орун алат

Теорема. $\delta_q=(\delta_{q,1},\dots,\delta_{q,k})$ байестик критерийи каалагандай q априордук бөлүштүрүүсүндө жашайт. Ал төмөнкү көрүнүштө болот: δ_q критерийи H_j гипотезасын кабыл алат, б.а. эгерде

$$q_j f_j(x_1,\dots,x_n)=\max_{i=1,\dots,k} q_i f_i(x_1,\dots,x_n)$$

болсо, анда $\delta_{q,j}(x_1,\dots,x_n)=1$.

Минимакстык ыкма. Бул ыкма боюнча

$$\alpha(\delta)=\max_j \alpha_j(\delta)$$

максималдык маанилери салыштырылат. Эгерде δ критерийи $\alpha(\delta)$ минималдык каталыгына ээ болсо, анда ал минимакстык критерий деп аталат.

17.1. a орточосу жана дисперсиясы белгисиз болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган n көлөмдүү тандалма берилген. Эгерде гипотезалардын априордук ыктымалдыктары барабар болсо, a параметри жөнүндөгү эки жөнөкөй гипотезаны ажыратуу үчүн байестик критерийди тургузгула.

17.2. $X_1,\dots,X_n$ - бул a орточолуу жана бирдик дисперсиялуу нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында a параметри априордук ыктымалдыктары барабар болгон төмөнкү маанилерди гана кабыл алышы мүмкүн

а) 1 жана 2;　　　　б) 1, 2 жана 3

$\delta=\delta(\overline{X})$ байестик критерийин тургузгула. $\delta(3)$ ны эсептегиле.

17.3. $X_1,\dots,X_n$ - орточосу a болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында a параметри априордук ыктымалдыктары барабар болгон 1, 2 жана 3 маанилерин гана кабыл алышы мүмкүн. Байестик критерийди тургузгула.

17.4. $X_1,\dots,X_n$ - параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында p параметри априордук ыктымалдыктары тиешелеш түрдө 1/3 жана 2/3 кө барабар болгон 1/2 жана 1/4 маанилерин гана кабыл алышы мүмкүн. Байестик критерийди тургузгула.

17.5. $X_1,\ldots,X_n$ - параметрлери m жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, мында p параметри априордук ыктымалдыктары тиешелеш түрдө $1/5$ жана $4/5$ ке барабар болгон $1/3$ жана $2/3$ маанилерин гана кабыл алышы мүмкүн, ал эми m параметри белгилүү жана фиксирленген. Байестик критерийди тургузгула.

17.6. a орточосу белгисиз жана дисперсиясы белгисиз болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган көлөмү 1 ге барабар болгон тандалма берилген. a параметри жөнүндөгү эки жөнөкөй гипотезаны ажыратуу үчүн минимакстык критерийди тургузгула.

§18. Кубаттуурак критерийлер

F_1, F_2 эки бөлүштүрүүсү жана тандалманын бөлүштүрүлүшү жөнүндө H_1, H_2 эки жөнөкөй гипотезасы берилген, мында H_j - бул тандалма F_j, $j=1,2$, бөлүштүрүүсүнөн алынды деген гипотеза.

H_1 жана H_2 гипотезаларын ажыратуучу ε *ченемдүү кубаттуурак критерий* деп, $\alpha(\delta)\le\varepsilon$ аткарылган δ (рандомизирленген) критерийи жана кубаттуулугу δ дан аз, ченеми ε дон ашып кетпеген каалагандай башка критерий аталат.

R деги кандайдыр бир μ ченемине салыштырмалуу доминирлөө шарты аткарылсын. $f_1(x)$ менен μ ченемине салыштырмалуу F_1 бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгын, $f_2(x)$ менен μ ченемине салыштырмалуу F_2 бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгын белгилейли. $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ - негизги гипотезадагы чындыкка жакындык функциясы, $f_2(x_1,\ldots,x_n)$ - альтернативдүү гипотезадагы чындыкка жакындык функциясы болсун. Мында төмөнкү теорема орун алат.

Нейман-Пирсондун леммасы. ε ченемдүү кубаттуурак критерий каалаган $\varepsilon>0$ үчүн жашайт жана төмөнкү барбардык менен аныкталат:

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1,\ \textit{эгерде}\ \dfrac{f_2(x_1,\ldots,x_n)}{f_1(x_1,\ldots,x_n)}>c,\\[2mm] 0,\ \textit{эгерде}\ \dfrac{f_2(x_1,\ldots,x_n)}{f_1(x_1,\ldots,x_n)}<c,\\[2mm] \rho,\ \textit{эгерде}\ \dfrac{f_2(x_1,\ldots,x_n)}{f_1(x_1,\ldots,x_n)}=c\end{cases}$$

мында c жана ρ турактуулары бир маанилүү түрдө төмөнкү теңдемеден аныкталышат:

$$E_{H_1}\delta(X_1,...,X_n)$$
$$= P_{H_1}\left\{\frac{f_2(X_1,...,X_n)}{f_1(X_1,...,X_n)} > c\right\} + \rho P_{H_1}\left\{\frac{f_2(X_1,...,X_n)}{f_1(X_1,...,X_n)} = \right\} = \varepsilon.$$

18.1. Кандайдыр бир тандалма берилсин. Негизги гипотеза боюнча тандалманын элементтери стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. Альтернативдүү гипотеза боюнча тандалманын элементтери параметри $1/2$ болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнө ээ. Биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы $1/2$ ге барабар болгон бул эки гипотезаны ажыратуучу кубаттуурак критерийди тургузгула.

18.2. Көлөмү 1 болгон X_1 тандалмасы боюнча X_1 байкоосунун f бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгы жөнүндөгү гипотезалар текшерилип жатат: $H_1 = \{f = f_1\}$ гипотезасы $H_2 = \{f = f_2\}$ альтернативасына каршы. Мында,

$$f_1(y) = \begin{cases} 2y, \text{ эгерде } y \in [0,1] \\ 0, \text{ эгерде } y \notin [0,1], \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2(1-y), \text{ эгерде } y \in [0,1] \\ 0, \text{ эгерде } y \notin [0,1]. \end{cases}$$

ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула жана анын кубаттуулугун эсептегиле.

Чыгаруу. $n=1$ болгондо чындыкка жакындык катышы $1/x_1 - 1$ ге барабар. Ошондуктан $1/x_1 - 1 > c$ же $x_1 < c_1$ болгондо кубаттуурак критерий негизги гипотезаны четке кагат. c_1 саны

$$\alpha(\delta) = P_{H_1}\{X_1 < c_1\} = c_1^2 = \varepsilon$$

барабардыгынан аныкталат. Эгерде $X_1 < \sqrt{\varepsilon}$ болсо, анда $c_1 = \sqrt{\varepsilon}$ жана негизги гипотеза четке кагылат. Бул критерийдин кубаттуулугу

$$\beta(\delta) = P_{H_2}\{X_1 < c_1\} = 1-(1-c_1)^2 = 1-(1-\sqrt{\varepsilon})^2$$

ка барабар.

18.3. $X_1,...,X_n$ байкоолорунун f бөлүштүрүүсүнүн тыгыздыгы жөнүндөгү гипотезалар текшерилип жатат: $H_1 = \{f = f_1\}$ гипотезасы $H_2 = \{f = f_2\}$ альтернативасына каршы. Мында,

$$f_1(y) = \begin{cases} 1, \text{ эгерде } y \in [0,1] \\ 0, \text{ эгерде } y \notin [0,1], \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2y, \text{ эгерде } y \in [0,1] \\ 0, \text{ эгерде } y \notin [0,1]. \end{cases}$$

а) $n=1$; б) $n=2$

болгондо ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула

18.4. Көлөмү 1 ге барабар болгон X_1 тандалмасы боюнча X_1 тыгыздыгы

$$f(y) = \begin{cases} 3/2, \text{ эгерде } y \in [0,1/2] \\ 1/2, \text{ эгерде } y \in [1/2,1] \\ 0, \text{ эгерде } y \notin [0,1] \end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүгө ээ деген альтернативасына каршы болгон [0,1] кесиндисинде X_1 бир калыпта бөлүштүрүлгөн деген гипотеза текшерилип жатат. Ченеми $1/4$ болгон кубаттуурак критерийди тургузгула.

Чыгаруу. Эгерде $x_1 \in [0,1/2]$ болсо, анда чындыкка жакындык катышы $3/2$ кө, эгерде $x_1 \in [1/2,1]$ болсо, анда $1/2$ ге барабар болот. Каалаган $1/2 \le c < 3/2$ үчүн

$$P_{H_1}\left\{\frac{f_2(X_1)}{f_1(X_1)} > c\right\} = P_{H_1}\{0 \le X_1 \le 1/2\} = 1/2 > 1/4$$

экендигин белгилеп өтөбүз.

$c \ge 3/2$ болоор менен $P_{H_1}\{f_2(X_1)/f_1(X_1) > c\}$ ыктымалдыгы нөлгө барабар болот, бул болсо $1/4$ ден кичине. Ошондуктан $c = 3/2$ деп алуу жана ρ ну

$$\frac{1}{4} = P_{H_1}\left\{\frac{f_2(X_1)}{f_1(X_1)} > \frac{3}{2}\right\} + \rho P_{H_1}\left\{\frac{f_2(X_1)}{f_1(X_1)} = \frac{3}{2}\right\} = \rho P_{H_1}\{0 \le X_1 \le 1/2\} = \frac{\rho}{2}$$

шартынан табуу керек. Мындан $\rho = 1/2$. Ошондуктан ченеми $1/4$ болгон кубаттуурак критерий төмөнкү көрүнүштө болот: $X_1 \in (1/2,1]$ болгондо $\delta(X_1) = 0$ болот (H_1 гипотезасы кабыл алынат) жана $X_1 \in [0,1/2]$ болгондо $\delta(X_1) = 1/2$ болот (H_2 гипотезасы $1/2$ ге барабар ыктымалдык менен кабыл алынат).

18.5. X_1 - бул көлөмү 1 болгон тандалма болсун. Негизги гипотеза боюнча тандалманын элементтери $[0,1]$ кесиндисинде бир калыпта бөлүштүрүлгөн. Альтернатива боюнча тандалма элементтери параметри 1 болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ. Бул гипотезаларды ажыратуу үчүн ченеми ε болгон кубаттуурак критерийди тургузгула жана анын кубаттуулугун эсептегиле.

18.6. X_1 - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган, көлөмү 1 болгон тандалма болсун. Эки жөнөкөй гипотезаны карайбыз: $\lambda = 1$ жана $\lambda = 2$. $\alpha = 1 - e^{-1}$ биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы менен $\delta = \delta(X_1)$ кубаттуурак критерийин тургузгула. Бул критерийдин кубаттуулугун тапкыла.

18.7. X_1 - көлөмү 1 болгон тандалма болсун. Гипотеза: X_1 параметри $\alpha = 2$ болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ. Альтернатива: X_1 дин тыгыздыгы

$$f_2(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{эгерде } y \in [0,1], \\ 1 & \text{эгерде } y \in [3/2,2], \\ 0 & \text{эгерде } y \notin [0,1] \cup [3/2,2]. \end{cases}$$

Ченеми $1/3$ болгон кубаттуурак критерийди тургузгула.

18.8. X_1 - көлөмү 1 болгон тандалма болсун. Гипотеза: X_1 бул $[1,2]$ кесиндисинде бир калыпта бөлүштүрүүгө ээ. Альтернатива: X_1 дин тыгыздыгы

$$f_2(y)=\begin{cases}1/2 & \text{эгерде } y\in[0,1],\\ 1 & \text{эгерде } y\in[1,3/2],\\ 0 & \text{эгерде } y\notin[0,3/2].\end{cases}$$

Ченеми $1/6$ болгон кубаттуурак критерийди тургузгула.

18.9. X_1 - көлөмү 1 болгон тандалма болсун. Гипотеза: X_1 параметри $p=1/2$ болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнө ээ. Альтернатива: X_1 параметрлери $m=2$ жана $p=1/2$ болгон биномиалдык бөлүштүрүүгө ээ. Ченеми $1/5$ болгон кубаттуурак критерийди тургузгула.

18.10. Көз карандысыз сыноолор удаалаштыгында баштапкы оң натыйжалардын ыктымалдыктары бирдей жана p га барабар. $p=0{,}01$ альтернативасына каршы $p=0$ гипотезасын текшерүү үчүн критерий тургузгула, биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктары $0{,}01$ ден ашпай тургандай тандалманын эң кичине көлөмүн аныктагыла.

18.11. Сөөкчө оюнун байкап турган оюнчуда ыргытуунун 18% инде алтылык, 14% инде бештик, калган төрт грандары бирдей ыктымалдыкта (б.а. $0{,}17$ ге барабар ыктымалдыкта) түшө тургандай сезилди. Оюнга катышууга чакырылуу менен бул оюнчу өзүнүн гипотезасын сөөкчөнү катарынан n жолу ыргытууда алдын-ала сынап көрүүгө уруксат сурады. Мында жалгыз альтернатива: оюн сөөкчөсү «таза» жасалган. $n=2$ болгондо ченеми $0{,}0196$ болгон кубаттуурак критерийди тапкыла.

18.12. X_1 - көлөмү 1 болгон тандалма болсун. X_1 байкоосунун F бөлүштүрүүсү жөнүндөгү гипотезалар текшерилет: $H_1=\{F=F_1\}$ гипотезасы $H_2=\{F=F_2\}$ альтернативасына каршы. F_1 бөлүштүрүүсү - бул нөлдө кубулган бөлүштүрүү менен $[0,1]$ кесиндисинде бир калыпта болгон бөлүштүрүүнүн тең пропорциялуу аралашмасы. F_2 бөлүштүрүүсү - бул нөлдө кубулган бөлүштүрүү менен $[0,1]$ кесиндисинде тыгыздыгы $2y$ болгон бөлүштүрүүнүн тең пропорциялуу аралашмасы. Ченеми $1/2$ болгон кубаттуурак критерийди тургузгула. Биринчи түрдөгү каталыгы ε болгон рандомизирленген кубаттуурак критерий үчүн бардык $\varepsilon\in[0,1]$ дорду тапкыла.

18.13. $X_1,\dots,X_n$ - орточосу a жана σ^2 дисперсиясы белгилүү болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $H_2=\{a=a_2\}$ альтернативасына каршы $H_1=\{a=a_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула, мында $a_1<a_2$. Бул критерий абалдуу болобу?

Чыгаруу. Чындыкка жакындык катышы H_1 гипотезасында абсолюттуу үзгүлтүксүз бөлүштүрүүгө ээ болот, ошондуктан кубаттуурак критерий рандомизирленбеген болот. Критикалык көптүк

$$\frac{f_2(X_1,...,X_n)}{f_1(X_1,...,X_n)} \equiv \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-a_1)^2-(X_i-a_2)^2\right)\right\} \geq c$$

барабарсыздыгы менен аныкталат, бул $\overline{X} \geq c_1$ катышына эквиваленттүү, мында c_1 берилген ε ченеми боюнча төмөнкүдөй аныкталат:

$$\alpha(\delta) = P_{H_1}\{\overline{X} \geq c_1\}$$

$$= P_{H_1}\left\{\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a_1}{\sigma} \geq \sqrt{n}\frac{c_1-a_1}{\sigma}\right\} = \overline{\Phi}\left(\sqrt{n}\frac{c_1-a_1}{\sigma}\right) = \varepsilon.$$

Анда $\sqrt{n}(c_1-a_1)/\sigma = \zeta_{1-\varepsilon}$, мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул нормалдуу стандарттуу бөлүштүрүүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлиндеги квантили. Ошондуктан $c_1 = a_1 + \sigma\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}$ жана ε ченемдүү кубаттуурак критерий

$$\delta = \begin{cases} 1, \text{ эгерде } \overline{X} \geq a_1 + \sigma\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}, \\ 0, \text{ эгерде } \overline{X} < a_1 + \sigma\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n} \end{cases}$$

көрүнүшүндө болот.

Бул критерийдин кубаттуулугу

$$\beta(\delta) = P_{H_2}\{\overline{X} \geq a_1 + \sigma\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}\}$$

$$= P_{H_2}\left\{\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a_2}{\sigma} \geq \zeta_{1-\varepsilon} - \sqrt{n}\frac{a_2-a_1}{\sigma}\right\} = \overline{\Phi}\left(\zeta_{1-\varepsilon} - \sqrt{n}\frac{a_2-a_1}{\sigma}\right)$$

га барабар. $\zeta_{1-\varepsilon} - \sqrt{n}(a_2-a_1)/\sigma \to -\infty$ болгондуктан, каалагандай бекемделген ε үчүн n өскөн сайын критерийдин кубаттуулугу 1 ге умтулат. Ошондуктан критерий абалдуу.

18.14. Математикалык күтүү белгилүү жана нөлгө барабар болгон учурда нормалдуу бөлүштүрүүнүн белгисиз дисперсиясына салыштырмалуу эки жөнөкөй гипотезаны ажыратуу үчүн биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы берилген n көлөмдүү тандалма боюнча кубаттуурак критерийди тургузгула.

18.15. $X_1,...,X_n$ - параметрлери a жана σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $H_2 = \{a = a_2, \sigma^2 = \sigma_2^2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{a = a_1, \sigma^2 = \sigma_1^2\}$ гипотезасын текшерүү үчүн кубаттуурак критерийди тургузгула.

18.16. Параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча $\alpha_1 < \alpha_2$ болгондо $\alpha = \alpha_1$ гипотезасын жана $\alpha = \alpha_2$ альтернативасын ажыратуучу асимптотикалык ченеми ε болгон кубаттуурак критерийди тургузгула. Тургузулган критерийдин кубаттуулугунун $n \to \infty$ дагы пределин эсептегиле.

18.17. Параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма боюнча $\lambda_1 < \lambda_2$ болгондо $\lambda = \lambda_1$ гипотезасын жана

$\lambda = \lambda_2$ альтернативасын ажыратуучу асимптотикалык ченеми ε болгон кубаттуурак критерийди тургузгула. Тургузулган критерийдин кубаттуулугунун $n \to \infty$ дагы пределин эсептегиле.

18.18. Параметрлери m жана p болгон биномиалдык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча $p_1 < p_2$ болгондо $p = p_1$ гипотезасын жана $p = p_2$ альтернативасын ажыратуучу асимптотикалык ченеми ε болгон кубаттуурак критерийди тургузгула. Тургузулган критерийдин кубаттуулугунун $n \to \infty$ дагы пределин эсептегиле.

18.19. Параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча $p_1 < p_2$ болгондо $p = p_1$ гипотезасын жана $p = p_2$ альтернативасын ажыратуучу асимптотикалык ченеми ε болгон кубаттуурак критерийди тургузгула. Тургузулган критерийдин кубаттуулугунун $n \to \infty$ дагы пределин эсептегиле.

18.20. Бернулли схемасындагы ийгилик ыктымалдыгы p белгисиз. $p_1 < p_2$ болгондо $p = p_2$ альтернативасына каршы $p = p_1$ гипотезасын текшерүү үчүн эксперимент жүргүзүлүп, мында алгачкы жолу болбостукка өбөлгө түзүүчү ийгиликтер санын байкашкан. p_1^s ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула, мында $s \geq 1$ - берилген бүтүн сан. Бул критерийдин кубаттуулугун тапкыла.

18.21. Эгерде H_1 жана H_2 гипотезаларынын априордук ыктымалдыктары тиешелеш түрдө $1/3$ жана $2/3$ ге барабар деп болжолдосок, кубаттуурак критерийди аныктоодо (Нейман-Пирсондун леммасында) катышуучу кандай c турактуусу үчүн бул критерий байестик критерий менен дал келет?

18.22. Кубаттуурак критерийдин абалдуулугун далилдегиле.

18.23. $m(\varepsilon)$ менен ε ченемдүү бардык рандомизирленген критерийлердин кубаттуураагынын кубаттуулугун белгилейли. $m(\varepsilon) \geq \varepsilon$ экендигин далилдегиле.

§19. Бир калыпта кубаттуурак критерийлер

$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ - бөлүштүрүүлөрдүн кандайдыр бир жыйыны жана $X_1, X_2, \ldots$ - бул F_θ бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\theta \in \Theta_0$ татаал альтернативасына каршы $\theta = \theta_0$ жөнөкөй гипотезасы текшерилсин, мында θ_0 - бул Θ дагы бекемделген чекит, ал эми Θ_0 - бул Θ дагы кандайдыр бир камтылуучу көптүк, жана $\theta_0 \notin \Theta_0$. $\alpha(\delta) = E_{\theta_0}\delta(X_1, \ldots, X_n)$ деп δ критерийинин ченемин, ал эми

$\beta_\theta(\delta) = 1 - E_\theta\delta(X_1,...,X_n), \theta \in \Theta_0$, деп δ критерийинин кубаттуулук функциясын белгилейбиз.

ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерий деп, $\alpha(\delta) \le \varepsilon$ аткарылган δ (рандомизирленген) критерийи жана каалаган $\theta \in \Theta_0$ маанисинде кубаттуулугу $\beta_\theta(\delta)$ дан ашпаган, ченеми ε дон ашып кетпеген каалагандай башка критерий аталат.

19.1. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана σ^2 дисперсиясы белгилүү болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{a > a_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{a = a_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

Чыгаруу. 18.13-мисалда тургузулган критерий a_2 ден көз каранды эмес, б.а. каалагандай $a = a_2 > a_1$ жөнөкөй альтернативасында кубаттуурак критерий болот. Ошондуктан бул критерий $a > a_1$ татаал альтернативасына каршы $a = a_1$ жөнөкөй гипотезасын текшерүү үчүн бир калыпта кубаттуурак критерий болуп эсептелет.

19.2. $X_1,...,X_n$ - орточосу a белгилүү жана σ^2 дисперсиясы белгисиз болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{(X-a)^2}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\sigma^2 < \sigma_1^2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\sigma^2 = \sigma_1^2\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.3. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\alpha > \alpha_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\alpha = \alpha_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.4. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_{\alpha,\beta(y)} = \begin{cases} \alpha^{-1}e^{-(y-\beta)/\alpha}, \text{ эгерде } y \ge \beta \\ 0, \text{ эгерде } y < \beta \end{cases}, \alpha > 0, \beta \in R,$$

болгон эки параметрдүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) α белгилүү болсун. $X_{(1)}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\beta \ne \beta_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\beta = \beta_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

б) $H_2 = \{\alpha < \alpha_1, \beta < \beta_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.5. $X_1,...,X_n$ - бул $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $X_{(n)}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\theta \neq \theta_0\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\theta = \theta_0\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.6. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{p > p_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{p = p_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.7. 16.6-мисалдын шартында 100 жолку эксперименттин негизинде 0,1 ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.8. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\lambda > \lambda_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.9. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон геометриялык бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{p > p_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{p = p_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула.

19.10. Көлөмү 1 болгон X_1 тандалмасы боюнча төмөнкү альтернативага каршы төмөнкүдөй негизги гипотеза текшерилет. Гипотеза: X_1 стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. Альтернатива: X_1 бөлүштүрүүсү $P\{X_1 \in [0,1]\} = 0$ касиетине ээ. Бул критерийдин мүмкүн болгон эң кичине ченеми канчага барабар?

§20. Макулдук критерийлери

Белгисиз F бөлүштүрүүсүнөн алынган $X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин. F_1 кандайдыр бир бөлүштүрүү болсун. $H_1 = \{F = F_1\}$ негизги гипотезасын текшерүү үчүн белгиленген критерийлер *макулдук критерийлери* деп аталышат. Көп учурда альтернативдүү гипотеза болуп $H_2 = \{F \neq F_1\}$ гипотезасы саналат. Кээ бир учурда H_1 дин ордуна татаал гипотеза да алынат.

Төмөнкүдөй касиетке ээ болгон кандайдыр бир $d(P_n^*, F_1)$ функционалы берилсин:

$$P_{H_1}\{d(P_n^*,F_1)>c\}=\varepsilon \text{ же } \lim_{n\to\infty} P_{H_1}\{d(P_n^*,F_1)>c\}=\varepsilon.$$

$d(P_n^*,F_1)$ функционалынын маанисин сунушталып жаткан теоретикалык бөлүштүрүү менен эмпирикалык бөлүштүрүүнүн ортосундагы «аралык» катары кароого болот.

d функционалына негизделген (асмиптотикалык) ε ченемдүү макулдук критерийи төмөнкүчө тургузулат: эгерде берилген тандалма үчүн $d(P_n^*,F_1)$ мааниси c дан ашып кетпесе, анда критерий негизги гипотезаны четке кагат.

Эгерде F бөлүштүрүүсү F_1 ден айырмалуу болгон учурда $n\to\infty$ да $d(P_n^*,F_1)$ чексизге умтулушу ыктымал болсо, анда берилген макулдук критерийи абалдуу. Тагыраак айтканда, F_1 ден айырмалуу болгон каалаган F бөлүштүрүүсүндө экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы нөлгө умутулат.

Колмогоров критерийи. Белгисиз F бөлүштүрүүсүнөн алынган $X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин жана $F_n^*(y)$ - бул тандалма боюнча тургузулган бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы болсун. F_1 - бул $F_1(y)$ үзгүлтүксүз бөлүштүрүү функциясы менен берилген кандайдыр бир бөлүштүрүү болсун. $H_1=\{F=F_1\}$ жөнөкөй гипотезасын текшерүү үчүн Колмогоров статистикасы

$$d(X_1,...,X_n)=\sqrt{n}\sup_{y\in R}\left|F_n^*(y)-F_1(y)\right|$$

колдонулат.

Колмогоровдун теоремасы. Эгерде $F=F_1$ болсо, анда Колмогоров статистикасынын бөлүштүрүүсү $n\to\infty$ да бөлүштүрүү функциясы

$$K(y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2y^2},\ y>0,$$

болгон Колмогоров бөлүштүрүүсүнө жай жыйналат.

Эгерде $d(X_1,...,X_n)$ Колмогоров статистикасынын мааниси Колмогоров бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлиндеги $\zeta_{1-\varepsilon}$ квантилинен ашып кетсе, анда ε асимптотикалык ченемдүү Колмогоров критерийи негизги гипотезаны четке кагат.

Пирсондун хи-квадрат критерийи. Белгисиз F бөлүштүрүүсүнөн алынган $X_1,...,X_n$ тандалмасы жана F_1 кандайдыр бир бөлүштүрүүсү берилсин. R ди жабуучу k сандагы кесилишпөөчү $\Delta_1,...,\Delta_k$ интервалдарынын чектүү жыйыны берилсин. $p_j=F_1(\Delta_j)$ деп, F_1 бөлүштүрүүсүнүн бул интервалдарга таандык болуу ыктымалдыктарын жана ν_j деп Δ_j интервалына таандык болгон тандалманын элементтеринин санын белгилейбиз.

Белгисиз чыныгы ыктымалдыктардын $(F(\Delta_1),...,F(\Delta_k))$ векторунун $(p_1,...,p_k)$ вектору менен дал келиши жөнүндөгү H_1 гипотезасын текшерүү үчүн хи-квадрат статистикасы

$$\chi^2(X_1,...,X_n)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(v_j-np_j)^2}{np_j}$$

колдонулат.

Пирсондун теоремасы. Эгерде H_1 гипотезасы туура болсо, анда хи-квадрат статистикасынын бөлүштүрүүсү $n\to\infty$ да эркин даражасы $k-1$ болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнө жай жыйналат.

Эгерде хи-квадрат статистикасынын $\chi^2(X_1,...,X_n)$ мааниси да эркин даражасы $k-1$ болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлиндеги $\zeta_{1-\varepsilon}$ квантилинен ашып кетсе, анда ε асимптотикалык ченемдүү Пирсон критерийи негизги гипотезаны четке кагат.

20.1. Көлөмү 3 болгон X_1,X_2,X_3 тандалмасы берилген. Бул тандалманын $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынгандыгы жөнүндөгү гипотезаны текшерүү үчүн Колмогоров критерийи колдонулат: эгерде $\sup\limits_{y\in[0,1]}\left|F_3^*(y)-y\right|>1/3$ болсо, анда бир калыптуулук жөнүндөгү гипотеза четке кагылат. Бул критерийди ирээттелген статистика термининде айкын түрдө баяндагыла. Бул критерийдин ченеми эмнеге барабар?

20.2. Колмогоров критерийинин абалдуулугун далилдегиле.

20.3. Тандалманын $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынгандыгы жөнүндөгү гипотезаны текшерүү үчүн омега-квадрат статистикасы

$$\omega^2=\int_0^1 (F_n^*(y)-y)^2\,dy$$

колдонулат. Эгерде $\omega^2\ge\gamma$ болсо, анда бир калыптуулук жөнүндөгү гипотеза четке кагылат, мында $\gamma>0$ саны алдын-ала тандалат. $[0,1]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма үчүн

$$E\omega^2=1/6n$$

барабардыгын далилдегиле. Чебышев барабарсыздыгынын жардамында критерийдин ченеми ε дон ашып кетпей тургандай γ маанисин көрсөткүлө.

20.4. $0\le X_{(1)}\le X_{(n)}\le 1$ шартында

$$\int_0^1 (F_n^*(y)-y)^2\,dy=\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{(k)}-\frac{2k-1}{n}\right)^2$$

барабардыгынын аткарыла тургандыгын далилдегиле (ушул формуланын жардамында көп учурда ω^2 статистикасынын мааниси эсептелет).

20.5. Тандалманын F үзгүлтүксүз бөлүштүрүү функциясы менен берилген бөлүштүрүүдөн алынгандыгы жөнүндөгү гипотезаны текшерүү үчүн

$$\omega^2 = \int_0^1 (F_n^*(y) - F(y))^2 dF(y)$$

статистикасы колдонулат. Негизги гипотеза аткарылганда ω^2 статистикасынын бөлүштүрүүсү F үзгүлтүксүз бөлүштүрүүсүнөн көз карандысыз экендигин далилдегиле.

20.6. Монетаны $n = 4040$ жолу ыргытууда 2048 жолу герб тарабынан 1992 жолу жазуу тарабынан түшкөн. Бул герб түшүүсүнүн туруктуу $p = 1/2$ ыктымалдыгы жашайт деген гипотеза менен макул болобу?

20.7. $n = 4000$ жолку жүргүзүлгөн көз карандысыз сыноодо окуялардын толук группасын түзүшкөн A_1, A_2 жана A_3 окуялары тиешелеш түрдө 1905, 1015 жана 1080 жолу пайда болгон. Бул берилгендер $H = \{p_1 = 1/2, p_2 = p_3 = 1/4\}$ гипотезасы менен 0,05 деңгээлинде макул болобу, мында $p_j = P\{A_j\}$?

20.8. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана бирдик дисперсияга ээ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. Каалаган $a < a_0$ үчүн $\alpha_2(\delta) \to 0$ жана $a > a_0$ үчүн $\alpha_3(\delta) \to 0$ болгон $H_1 = \{a = a_0\}$, $H_2 = \{a < a_0\}$ жана $H_3 = \{a > a_0\}$ гипотезаларын ажыратуу үчүн биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы $a_1(\delta) = \varepsilon$ болгон δ критерийин тургузгула.

Чыгаруу. H_1 гипотезасында стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болгон $\sqrt{n}(\overline{X} - a_0)$ статистикасынын жардамында критерий тургузабыз. Эгерде $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлиндеги квантили болсо, анда

$$\delta(X_1,...,X_n) = \begin{cases} H_2, \text{ эгерде } \sqrt{n}(\overline{X} - a_0) < -\zeta_{1-\varepsilon/2}, \\ H_1, \text{ эгерде } -\zeta_{1-\varepsilon/2} \le \sqrt{n}(\overline{X} - a_0) \le \zeta_{1-\varepsilon/2}, \\ H_3, \text{ эгерде } \sqrt{n}(\overline{X} - a_0) > \zeta_{1-\varepsilon/2}, \end{cases}$$

критерийи биринчи түрдөгү ε каталык ыктымалдыгына ээ болот. Экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы нөлгө умтулат:

$$P_{H_2}\{\delta \neq H_2\} = P_{H_2}\{\sqrt{n}(\overline{X} - a_0) > -\zeta_{1-\varepsilon/2}\} \to 0,$$

каалаган $a < a_0$ үчүн $\overline{X} - a_0 \xrightarrow{P} a - a_0 < 0$ болгондуктан n чоңойгон сайын $\sqrt{n}(\overline{X} - a_0)$ чоңдугу минус чексиздикке умтулушу ыктымал.

Симметрия боюнча үчүнчү түрдөгү каталык ыктымалдыгы да нөлгө умтулат.

20.9. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $p \neq p_0$ альтернативасына каршы $p = p_0$ гипотезасын текшерүү үчүн ε асимптотикалык ченемдүү кандайдыр бир абалдуу критерийди тургузгула.

20.10. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун. $\lambda \neq \lambda_0$ альтернативасына каршы $\lambda = \lambda_0$ гипотезасын текшерүү үчүн ε асимптотикалык ченемдүү кандайдыр бир абалдуу критерийди тургузгула.

20.11. Ишенимдүү интервалдын түзүлүшүн пайдаланып, төмөндөгү тандалмалар боюнча $\theta = 1$ гипотезасын текшерүү үчүн биринчи түрдөгү (так же асмиптотикалык) ε каталыгына ээ болгон критерийди тургузгула:

а) орточосу θ жана дисперсиясы 1 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча;

б) орточосу 1 жана дисперсиясы θ болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча;

в) параметри θ болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма боюнча;

г) параметри $\theta/2$ болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма боюнча;

д) параметри θ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма боюнча.

20.12. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $a = a_0$ жөнүндөгү гипотезаны текшерүү үчүн

$$\frac{\sqrt{n}\left|\overline{X} - a_0\right|}{\sqrt{S_0^2}}$$

статистикасы колдонулат. Тиешелеш келген критерийдин абалдуулугун далилдегиле.

20.13. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана бирдик дисперсиялуу көлөмү n болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма, ал эми $Y_1,...,Y_m$ - орточосу b жана бирдик дисперсиялуу көлөмү m болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, X жана Y тандалмалары көз карандысыз. a жана b математикалык күтүүлөрүнүн жакындыгы жөнүндөгү гипотеза текшерилет. Эгерде $\left|\overline{X} - \overline{Y}\right| \leq 1$ болсо, анда $H_1 = \{a = b\}$ негизги гипотезасы кабыл алынат. Антпесе, $H_2 = \{|a - b| > 1\}$ альтернативасы кабыл алынат. ($n, m \to \infty$ да) берилген критерий абалдуу болобу? Бул критерийдин биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгын тапкыла.

20.14. $X_1,...,X_n$ - орточосу a жана бирдик дисперсиялуу көлөмү n болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма, ал эми $Y_1,...,Y_m$ - орточосу b жана бирдик дисперсиялуу көлөмү m болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, X жана Y тандалмалары көз карандысыз. $a \ge b$ экендиги белгилүү. a жана b математикалык күтүүлөрүнүн барабардыгы жөнүндөгү гипотеза текшерилет. Эгерде

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\left|\overline{X}-\overline{Y}\right| \le c$$

болсо, анда $H_1 = \{a = b\}$ негизги гипотезасы кабыл алынат. Тескери учурда $H_2 = \{a > b\}$ альтернативасы кабыл алынат. Мында $c > 0$ - алдын-ала берилген сан. c дан көз каранды түрдө бул критерийдин ченемин тапкыла. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

20.15. $X_1,...,X_n$ - орточосу a, дисперсиясы σ_1^2 белгилүү жана көлөмү n болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма, ал эми $Y_1,...,Y_m$ - орточосу b жана дисперсиясы σ_2^2 белгилүү жана көлөмү m болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун, X жана Y тандалмалары көз карандысыз. $H_2 = \{a > b\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{a = b\}$ негизги гипотезасы каралат.

$$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}$$

статистикасына негиздеп, кандайдыр бир ε ченемдүү абалдуу критерийди тургузгула.

20.16. $X_1,...,X_n$ - орточосу a, дисперсиясы σ^2 жана көлөмү n болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма, ал эми $Y_1,...,Y_m$ - орточосу b, дисперсиясы σ^2 жана көлөмү m болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун. $a = b$ жөнүндөгү гипотезаны текшерүү үчүн

$$\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2\right)}}.$$

статистикасы колдонулат. Тиешелеш келген критерийдин абалдуулугун текшергиле.

20.17. $X_1,...,X_n$ жана $Y_1,...,Y_n$ дер үзгүлтүксүз бөлүштүрүүдөн алынган эки көз карандысыз тандалмалар болушсун. Бөлүштүрүүлөрдүн дал келүүсү жөнүндөгү гипотезаны текшерүү үчүн $Z_i = X_i - Y_i, i = 1,...,n$ айырмалар жыйыны колдонулат. Эгерде

$Z_1,...,Z_n$ удаалаштыгындагы оң мүчөлөрдүн санынын $n/2$ ден айырмачылыгы γ дан көп болсо, анда бөлүштүрүүлөрдүн дал келүүсү жөнүндөгү гипотеза четке кагылат, мында $\gamma > 0$ саны алдын-ала тандалат (белгилер критерийи). Биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгын так көрүнүштө тапкыла жана анын маанисин чоң n дер үчүн нормалдуу жакындаштыруунун жардамында баалагыла. Биринчи түрдөгү каталык ыктымалдыгы ε го барабар болушу үчүн γ санын кандай тандоо керек? Критерий абалдуу болобу?

20.18. 1901-жылы Англиядагы жана Уэльстеги калктын санын катттоодо (миңге чейинки тактыкта) 15729000 эркектер жана 16799000 аялдар катталган; 3497 эркек жана 3072 аял туулгандан сүйлөбөй тургандыгы (дудуктугу) катталган. Дудуктуктун жыныс менен байланышпагандыгы жөнүндөгү гипотезаны текшергиле.

Чыгаруу. Бернулли бөлүштүрүүсүнүн эки параметринин барабардыгы жөнүндөгү негизги гипотеза туура болгон учурда

$$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{p^*(1-p^*)(1/n+1/m)}}$$

статистикасы (тандалма орточолорунун ортосундагы нормалдаштырылган аралык) стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүгө жай жыйнала турган критерийди колдонууга болот. Мында n жана m менен тиешелеш түрдө $X_1,...,X_n$ жана $Y_1,...,Y_n$ көз карандысыз тандалмаларынын көлөмдөрүн белгиледик, ал эми $p^* = \frac{\sum X_i + \sum Y_j}{n+m}$ - бул негизги гипотеза туура деген болжолдоодо бириктирилген тандалма боюнча алынган p параметринин баалоосу. Берилгендер маанилерин коюп, $T = 7{,}91489$ маанисине ээ болобуз. Чыныгы маанилүүлүк деңгээли

$$\varepsilon^* = P\{|\xi| > T\} = 2\overline{\Phi}(7{,}91)$$

га барабар, мында ξ стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ. Оң жагы жогорку тактык даражасында 0 го барабар. Критерий статистикасы негизги гипотеза туура болгондо нөлдүк ыктымалдыкка ээ болгон четтөөнү берет, ошондуктан негизги гипотеза четке кагылат.

20.19. Муавр-Лапластын интегралдык теоремасын пайдаланып, $k = 2$ болгондо Пирсондун теоремасын далилдегиле.

20.20. Бернуллининин чоң сандар законун пайдаланып, «хи-квадрат» критерийинин абалдуулугун далилдегиле.

20.21. 800 сандагы π санынын алгачкы ондук белгилеринин ичинде 0,1,2,...,9 сандары тиешелеш түрдө 74,92,83,79,80,73,77,75,76,91 жолу пайда болду. Бул берилгендердин {0,1,...,9} көптүгүндөгү бир калыптагы бөлүштүрүү закону менен макулдугу жөнүндөгү гипотезаны текшергиле.

20.22. Швециядагы официалдуу маалыматтар боюнча 1935-жылы 88273 бала төрөлгөн: январда 7280 бала төрөлгөн, февралда - 6957, мартта - 7883, апрелде - 7884, майда - 7892, июнда - 7609, июлда - 7585, августа - 7393, сентябрда - 7203, октябрда - 6903, ноябрда - 6552, декабрда - 7132 бала төрөлгөн. Бул берилгендер кокусунан тандалган адамдын туулган күнү жылдын 365 күнүнүн каалаган бирине туура келүү ыктымалдыктары барабар деген гипотеза менен макулбу?

20.23. Төмөндө 12 сөөкчөнү бир убакытта ыргытуудагы 4096 сыноонун жыйынтыктары берилген. Ар бир сыноодо алтылык менен (алты очкосу бар граны менен) түшкөн сөөкчөлөр саны саналган. Сөөкчөлөр туура деген гипотезаны текшергиле.

Алтылыктар саны	0	1	2	3	4	5	6	≥7	Баары
Учурлар саны	447	1145	1181	796	380	115	24	8	4096

20.24. Төмөндө Оксфорддук доктор Э.Берр тарабынан 1963-жылдын 4-февралынан 1964-жылдын 18-мартына чейинки аралыкта интенсивдүү терапия бөлүмүнө пациенттердин келип түшүү моменттери жөнүндөгү маалыматтары берилген. Бул окуяларды группировкалоонун үч түрдүү ыкмаларын карайбыз.

А. Ай боюнча өзгөрүүсү

Айы жана жылы	Күндөрдүн саны	Пациенттердин саны	Айы жана жылы	Күндөрдүн саны	Пациенттердин саны
Февраль *63*	*25*	*13*	Сентябрь *63*	*30*	*17*
Март *63*	*31*	*16*	Октябрь *63*	*31*	*1*
Апрель *63*	*30*	*12*	Ноябрь *63*	*30*	*728*
Май *63*	*31*	*18*	Декабрь *63*	*31*	*32*
Июнь *63*	*30*	*23*	Январь *64*	*31*	*23*
Июль *63*	*31*	*16*	Февраль *64*	*29*	*17*
Август **63**	*31*	*15*	Март *64*	*18*	*7*

Пациенттер бөлүмгө каалаган бир күнү бирдей ыктымалдыкта келип түшөт деген гипотеза менен бул маалыматтар макулбу? Ушул эле суроону жылдын акыркы эки айы- ноябрь жана декабрды алып салуу менен изилдегиле.

В. Аптанын күндөрү боюнча өзгөрүүсү

Апта күндөрү	дүйшөмбү	бейшемби	шаршемби	бейшемби	жума	ишемби	жек шемби
Пациент саны	37	53	35	27	30	44	28

Пациенттер аптанын каалаган күнүндө бөлүмгө келип түшүү ыктымалдыктары бирдей деген гипотеза менен бул маалыматтар макулбу? Аптанын шейшембиден башка күндөрү үчүнчү?

С. Сутканын сааттары боюнча өзгөрүүсү

Убакыт интервалы	Пациенттер дин саны	Убакыт интервалы	Пациенттер дин саны
0-2	*14*	*12-14*	*31*
2-4	*17*	*14-16*	*30*
4-6	5	*16-18*	*26*
6-8	*8*	*18-20*	*29*
8-10	5	*20-22*	*31*
10-12	25	*22-24*	*31*

Интенсивдүү терапия бөлүмүнө келип түшүү ыктымалдыгы сутканын убактысынан көз карандысыз деген гипотеза менен бул маалыматтар макулбу? Бул суроону күндүзгү убакыт үчүн, б.а. 10.00дон 24.00 чейинки убакыт үчүн текшергиле.

Жетинчи бөлүм

Кайталоо үчүн маселелер

§21. Параметрлердин баасы

21.1. $X_1,...,X_n$ - параметрлери a жана σ^2 болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) σ^2 параметри үчүн $S^2=\overline{X^2}-(\overline{X})^2$ жана $S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$ баалоолорунун дисперсиясын жана жылышуусун тапкыла.

б) Моменттер методун пайдаланып a жана σ^2 параметрлерин баалагыла. Алынган баалоолордун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

в) Эки ченемдүү $\theta=(a,\sigma^2)$ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла. Алынган баалоолордун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

г) ζ^* тандалма медианасы a параметри үчүн жылышпас, абалдуу жана асимптотикалык нормалдуу баалоо болобу?

д) a параметри α параметрлүү көрсөткүчтүү бөлүштүрүүгө ээ болгон учурда a параметринин байестик баалоосун тапкыла.

е) S^2 жана S_0^2 дисперсия баалоолорун орточо квадраттык ыкманын жардамында салыштыргыла.

ж) Эки ченемдүү (a,σ^2) параметри үчүн эки ченемдүү $(\overline{X},S_0^2)$ статистикасы жетиштүү болобу?

з) Эки ченемдүү $(\overline{X},S_0^2)$ статистикасы толук боло алабы?

и) Эки ченемдүү (a,σ^2) параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

к) a жана σ^2 параметрлери үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү так ишенимдүү интервалдарды тургузгула.

21.2. $X_1,...,X_n$ - бул $[0,\theta]$ кесиндисинде бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) $2\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ баалоолорунун дисперсиясын жана жылышуусун тапкыла.

б) Моменттер методун пайдаланып θ параметрин баалагыла. Алынган баалоонун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

в) θ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла жана анын жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

г) θ параметри 1 жана 2 параметрлүү Парето бөлүштүрүүсүнө ээ болгон учурда θ параметринин байестик баалоосун тапкыла.

д) $2\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ баалоолорун орточо квадраттык ыкманын жардамында салыштыргыла.

е) $\overline{X}$ жана $X_{(n)}$ статистикаларынын кайсынысы жетиштүү статистика болот?

ж) $X_{(n)}$ статистикасы толук боло алабы?

з) $2\overline{X}$ баалоосу R-эффективдүү болобу?

и) θ параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

к) $2\overline{X}$ статистикасын пайдаланып θ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

л) $X_{(n)}$ статистикасын пайдаланып θ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү так ишенимдүү интервалды тургузгула.

21.3. Кандайдыр бир $G \subset R^d$ областындагы бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган $X_1,...,X_n$ тандалмасы берилсин. Монте-Карло ыкмасы боюнча

$$a=\int\limits_{G}\!...\!\int f(x_1,...,x_d)dx_1...dx_d$$

интегралынын маанисин баалоо үчүн

$$a_n^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

статистикасы колдонулат.

а) Ea_n^* жана Da_n^* ны тапкыла.

б) a_n^* дисперсиясынын жылышпас баалоосун тургузгула.

в) $\int\limits_{G}\!...\!\int f^4(x_1,...,x_d)dx_1...dx_d$ деп эсептеп a параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

21.4. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) Моменттер методун пайдаланып α параметрин баалагыла. Алынган баалоонун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

б) α параметринин жылышпас баалоосун тапкыла.

в) $\tau = 1/\alpha$ параметри үчүн $\overline{X}$ баалоосунун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

г) α параметри үчүн $\overline{X}$ статистикасы жетиштүү болобу?

д) $\overline{X}$ статистикасы толук боло алабы?

е) α параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

ж) α параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

21.5. $X_1,...,X_n$ - тыгыздыгы

$$f_\beta(y)=\begin{cases}e^{\beta-y}, \text{ эгерде } y\geq\beta\\ 0, \text{ эгерде } y<\beta\end{cases}$$

болгон жылышуучу көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) Моменттер методун пайдаланып β жылышуу параметрин баалагыла. Алынган баалоонун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

б) β жылышуу параметри үчүн максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла жана анын жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

в) Орточо квадраттык ыкманын жардамында $\overline{X}-1$ жана $X_{(1)}$ баалоолорун салыштыргыла.

г) β параметри үчүн $X_{(1)}$ статистикасы жетиштүү болобу?

д) $X_{(1)}$ статистикасы толук боло алабы?

е) β параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

ж) β параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү так ишенимдүү интервалды тургузгула.

21.6. $X_1,...,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

а) $\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $X_{(1)}$ баалоолорунун дисперсиясын жана жылышуусун тапкыла.

б) Моменттер методун пайдаланып p параметрин баалагыла. Алынган баалоонун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

в) p параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла жана анын жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

г) p параметри $1/4$ жана $3/4$ маанилерин тиешелеш түрдө $1/4$ жана $3/4$ ыктымалдыктары менен кабыл алат деп эсептеп, p параметринин байестик баалоосун тапкыла.

д) $\overline{X}$ жана $X_{(1)}$ баалоолорун орточо квадраттык ыкманын жардамында салыштыргыла.

е) $\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $2\overline{X}$ статистикаларынын кайсынысы жетиштүү статистика болот?

ж) $\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $2\overline{X}$ статистикаларынын кайсынысы толук статистика болот?

з) $\overline{X}$ баалоосу R-эффективдүү болобу?

и) p параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

к) $\overline{X}$ статистикасын пайдаланып p параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

21.7. $X_1,...,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

а) $\overline{X}$ жана $X_{(1)}$ баалоолорунун дисперсиясын жана жылышуусун тапкыла.

б) Моменттер методун пайдаланып λ параметрин баалагыла. Алынган баалоонун жылышпастыгын, абалдуулугун жана асимптотикалык нормалдуулугун текшергиле.

в) λ параметринин максималдуу чындыкка жакындык баалоосун тапкыла.

г) λ параметри 1 жана 2 маанилерин бирдей ыктымалдыкта кабыл алат деп эсептеп, λ параметринин байестик баалоосун тапкыла.

д) $\overline{X}$ жана $X_{(1)}$ баалоолорун орточо квадраттык ыкманын жардамында салыштыргыла.

е) $\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $2\overline{X}$ статистикаларынын кайсылары жетиштүү статистика болот?

ж) $\overline{X}$, $X_{(n)}$ жана $2\overline{X}$ статистикаларынын кайсылары толук статистика болот?

з) $\overline{X}$ баалоосу R-эффективдүү болобу?

и) λ параметринин эффективдүү жылышпас баалоосун тапкыла.

к) $\overline{X}$ статистикасын пайдаланып λ параметри үчүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү асимптотикалык ишенимдүү интервалды тургузгула.

§22. Гипотезаларды текшерүү

22.1. $X_1,...,X_n$ тандалмасы берилген. Негизги гипотеза H_1: тандалманын элементтери тыгыздыгы

$$f_1(y)=\begin{cases}2^y\ln 2, & эгерде\ y\le 0\\ 0, & эгерде\ y>0\end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүгө ээ. Альтернативдүү гипотеза H_2: тандалманын элементтери тыгыздыгы

$$f_2(y)=\begin{cases}3^y\ln 3, & эгерде\ y\le 0\\ 0, & эгерде\ y>0\end{cases}$$

болгон бөлүштүрүүгө ээ.

а) Эгерде $\overline{X} \geq -1/\ln 2$ болсо, δ_1 критерийи H_1 гипотезасын кабыл алат, эгерде $\overline{X} < -1/\ln 2$ болсо, δ_1 критерийи H_2 альтернативасын кабыл алат. $n \to \infty$ да бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

б) $\varepsilon = 0{,}05$ ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула жана анын абалдуулугун текшергиле.

в) Эгерде $X_{(n)} \leq -1/4$ болсо, δ_2 критерийи H_1 гипотезасын кабыл алат, эгерде $X_{(n)} > -1/4$ болсо, δ_2 критерийи H_2 альтернативасын кабыл алат. δ_2 критерийинин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарын тапкыла.

22.2. $X_1, \ldots, X_n$ - орточосу a жана дисперсиясы σ^2 белгилүү болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) Эгерде $\overline{X} < 1 + 1/\sqrt{n}$ болсо, δ_1 критерийи $\alpha = 1$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\alpha = 2$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарын тапкыла.

б) Эгерде $\overline{X} < 3/2$ болсо, δ_2 критерийи $\alpha = 1$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\alpha = 2$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

в) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{a = a_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{a = a_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

г) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{a > a_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{a = a_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

д) $H_2 = \{a < a_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{a = a_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

22.3. $X_1, \ldots, X_n$ - орточосу a белгилүү жана дисперсиясы σ^2 белгисиз болгон нормалдуу бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) Эгерде $\overline{(X-a)^2} \leq 1$ болсо, δ_1 критерийи $\sigma^2 = 1$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\sigma^2 = 2$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарын тапкыла.

б) Эгерде $\overline{X} < /2$ болсо, δ_2 критерийи $\sigma^2 = 1$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\sigma^2 = 2$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

в) $\overline{(X-a)^2}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\sigma^2 = \sigma_2^2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\sigma^2 = \sigma_1^2\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

г) $\overline{(X-a)^2}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\sigma^2 > \sigma_2^2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\sigma^2 = \sigma_1^2\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

д) $H_2 = \{\sigma^2 > \sigma_2^2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\sigma^2 = \sigma_1^2\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

22.4. $X_1,...,X_n$ - параметри α болгон көрсөткүчтүү бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) Эгерде $\overline{X} \le 1/2$ болсо, δ_1 критерийи $\alpha = 2$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\alpha = 4$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарын тапкыла.

б) Эгерде $\overline{X} < 1/3$ болсо, δ_2 критерийи $\alpha = 2$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\alpha = 4$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

в) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\alpha = \alpha_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\alpha = \alpha_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

г) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\alpha > \alpha_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\alpha = \alpha_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

д) $H_2 = \{\alpha < \alpha_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\alpha = \alpha_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

22.5. $X_1,...,X_n$ - бул $[0,\theta]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүдөн алынган тандалма болсун.

а) Эгерде $\overline{X} \le 3$ болсо, δ_1 критерийи $\theta = 2$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\theta = 4$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

б) Эгерде $X_{(n)} < 3$ болсо, δ_2 критерийи $\theta = 2$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\theta = 4$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарын тапкыла.

в) $X_{(n)}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\theta = \theta_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\theta = \theta_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

г) $X_{(n)}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\theta \neq \theta_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\theta = \theta_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

22.6. $X_1,\dots,X_n$ - параметри p болгон Бернулли бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

а) Эгерде $\overline{X} \leq 1/2$ болсо, δ_1 критерийи $p = 1/2$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $p = 3/4$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

б) Эгерде $\overline{X} < 1/3$ болсо, δ_2 критерийи $p = 1/2$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $p = 3/4$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

в) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{p = p_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{p = p_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

г) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{p > p_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{p = p_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

д) $H_2 = \{p < p_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{p = p_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

22.7. $X_1,\dots,X_n$ - параметри λ болгон Пуассон бөлүштүрүүсүнөн алынган тандалма болсун.

а) Эгерде $\overline{X} \leq 11$ болсо, δ_1 критерийи $\lambda = 10$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\lambda = 12$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

б) Эгерде $X_{(n)} < 9$ болсо, δ_2 критерийи $\lambda = 10$ гипотезасын кабыл алат, антпесе $\lambda = 12$ альтернативасын кабыл алат. Бул критерийдин биринчи жана экинчи түрдөгү каталык ыктымалдыктарынын пределдерин тапкыла.

в) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\lambda = \lambda_2\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

г) $\overline{X}$ жетиштүү статистикасын пайдаланып $H_2 = \{\lambda > \lambda_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

д) $H_2 = \{\lambda > \lambda_1\}$ альтернативасына каршы $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$ гипотезасын текшерүү үчүн ε ченемдүү бир калыпта кубаттуурак критерийди тургузгула. Бул критерийдин абалдуулугун текшергиле.

ТИРКЕМЕ

1. Негизги дискреттик бөлүштүрүүлөр

Бөлүштүрүү тиби жана белгилениши	Параметрлер	Мүмкүн болгон k маанилери	$P\{\xi = k\}$ ыктымалдыгы
Бернулли, B_p	$p \in [0,1]$	$k = 0, 1$	$P\{\xi = 0\} = 1 - p$ $P\{\xi = 1\} = p$
Биномиалдык, $B_{m,p}$	$m \in [1,2,\ldots\}$ $p \in [0,1]$	$k = 0, \ldots, m$	$C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$
Терс биномиалдык, $\overline{B_{m,p}}$	$m \in [1,2,\ldots\}$ $p \in (0,1]$	$k = 0, 1, 2, \ldots$	$C_{m+k-1}^k (1-p)^k p^m$
Геометриялык, G_p	$p \in (0,1]$	$k = 0, 1, 2, \ldots$	$p(1-p)^k$
Пуассондук, Π_λ	$\lambda \in (0, \infty)$	$k = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

2. Бөлүштүрүүнүн негизги тыгыздыктары

Бөлүштүрүү тиби Жана белгилениши	Параметрлер	y тин өзгөрүү областы	y чекитиндеги тыгыздык
Стандарттуу нормалдуу, $N_{0,1}$		$y \in R$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2}$
Кубулбаган нормалдуу, N_{a,σ^2}	$a \in R$, $\sigma^2 > 0$	$y \in R$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-a)^2/2\sigma^2}$
$[a,b]$ кесиндисинде бир калыпта, $U_{a,b}$	$a,b \in R$, $a < b$	$y \in [a,b]$ $y \notin [a,b]$	$(b-a)^{-1}$ 0
Бета-бөлүштүрүү, $B_{\alpha,\beta}$	$\alpha,\ \beta > 0$	$y \in [0,1]$ $y \notin [0,1]$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$ 0
Көрсөткүчтүү (экспоненциалдуу), E_α	$\alpha > 0$	$y \geq 0$ $y < 0$	$\alpha e^{-\alpha y}$ 0
Лаплас, L_α	$\alpha > 0$	$y \in R$	$(\alpha/2)e^{-\alpha\|y\|}$
Гамма, $\Gamma_{\alpha,\beta}$	$\alpha > 0, \beta > 0$	$y \geq 0$ $y < 0$	$\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\alpha y}$ 0
Коши, C_{a,σ^2}	$a \in R$, $\sigma > 0$	$y \in R$	$\frac{\sigma}{\pi(\sigma^2+(y-a)^2)}$
Эркин даражасы n болгон хи-квадрат, χ_n^2	$n \in \{1,2,\ldots\}$	$y \geq 0$ $y < 0$	$\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}$ 0
Эркин даражасы n болгон Стьюденттик, t_n	$n \in \{1,2,\ldots\}$	$y \in R$	$c_n(1+y^2/n)^{-(n+1)/2}$, $c_n = \frac{\Gamma((n+1/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}$
Вейбуллдук, $W_{\alpha,\theta}$	$\alpha > 0, \theta > 0$	$y \geq 0$ $y < 0$	$\theta\alpha y^{\alpha-1} e^{-\theta y^\alpha}$ 0
Парето, $P_{\beta,\theta}$	$\beta > 0, \theta > 0$	$y \geq 0$ $y < 0$	$\beta\theta^\beta y^{-(\beta+1)}$ 0

3. Нормалдуу бөлүштүрүү таблицасы

Таблицада $\overline{\Phi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$ функциясынын маанилери келтирилген.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,500	,496	,492	,488	,484	,480	,476	,472	,468	,464
0,1	,460	,456	,452	,448	,444	,444	,436	,433	,429	,425
0,2	,421	,417	,413	,409	,405	,401	,397	,394	,340	,386
0,3	,382	,378	,374	,371	,370	,363	,359	,356	,352	,348
0,4	,345	,341	,337	,334	,330	,326	,323	,319	,316	,312
0,5	,309	,305	,302	,298	,295	,291	,288	,284	,281	,272
0,6	,274	,271	,268	,264	,261	,258	,255	,251	,248	,245
0,7	,242	,239	,236	,233	,230	,227	,224	,221	,218	,215
0,8	,212	,209	,206	,203	,200	,198	,195	,192	,189	,187
0,9	,184	,181	,179	,176	,174	,171	,169	,166	,164	,161
1,0	,159	,156	,154	,152	,149	,147	,145	,142	,140	,138
1,1	,136	,134	,131	,129	,127	,125	,123	,121	,119	,117
1,2	,115	,113	,111	,109	,107	,106	,104	,102	,100	,099
1,3	,097	,095	,093	,092	,090	,089	,087	,085	,084	,082
1,4	,081	,079	,078	,076	,075	,074	,072	,071	,069	,068
1,5	,067	,066	,064	,063	,062	,061	,059	,058	,057	,056
1,6	,055	,054	,053	,052	,051	,049	,048	,047	,046	,046
1,7	,045	,044	,043	,042	,041	,040	,039	,038	,038	,037
1,8	,036	,035	,034	,034	,033	,032	,031	,031	,030	,029
1,9	,029	,028	,027	,027	,026	,026	,025	,024	,024	,023
2,0	,023	,022	,022	,021	,021	,020	,020	,019	,019	,018
2,1	,018	,017	,017	,017	,016	,016	,015	,015	,015	,014
2,2	,014	,014	,013	,013	,013	,012	,012	,012	,011	,011
2,3	,011	,010	,010	,010	,010	,009	,009	,009	,009	,008
2,4	,008	,008	,008	,008	,007	,007	,007	,007	,007	,006
2,5	,006	,006	,006	,006	,006	,005	,005	,005	,005	,005
2,6	,005	,005	,004	,004	,004	,004	,004	,004	,004	,004
2,7	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003
2,8	,003	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002
2,9	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,001	,001	,001

$\overline{\Phi}(3) = 0{,}00135$; $\overline{\Phi}(4) = 0{,}00003167$; $\overline{\Phi}(5) = 0{,}0000002867$; $\overline{\Phi}(6) = 0{,}0000000099$

4. χ^2 - бөлүштүрүүнүн таблицасы

Таблицада эркин даражасы n болгон χ^2-бөлүштүрүүнүн p деңгээлдүү квантилдеринин $z_n(p)$ маанилери берилген, б.а. $P\{\chi_n^2 < z_n(p)\} = p,\ p \in [0,1]$ болгон $z_n(p)$ маанилери келтирилген.

0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	,995	,999
,000	,001	,004	,016	,064	,148	,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64	7,88	10,8
,020	,040	,103	,211	,446	,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,82	9,21	10,6	13,8
,115	,185	,352	,584	1,01	1,42	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,84	11,3	12,8	16,3
,297	,429	,711	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3	14,9	18,5
,554	,752	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4	15,1	16,8	20,5
,872	1,13	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8	18,5	22,5
1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	24,3
1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	22,0	26,1
2,09	2,53	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	27,9
2,56	3,06	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	29,6
3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	31,3
3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	32,9
4,11	4,77	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	34,5
4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	36,1
5,23	5,99	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	37,7
5,81	6,61	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	39,3
6,41	7,26	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	40,8
7,02	7,91	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	42,3
7,63	8,57	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	43,8
8,26	9,24	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	45,3
8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	46,8
9,54	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	46,3
10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	49,7
10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	51,2
11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	52,6
12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	54,1
12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	55,5
13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	56,9
14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	58,3
15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	59,7
15,7	17,0	19,3	21,4	24,3	26,4	30,3	34,6	37,4	41,4	45,0	49,2	52,2	55,0	61,1
16,4	18,2	20,1	22,3	25,1	27,4	31,3	35,7	38,5	42,6	46,2	50,5	53,5	56,3	62,

5. Стьюденттин бөлүштүрүү таблицасы

Таблицада $P\{|t_n| > z_n(p)\} = p,\ p \in [0,1]$ аткарыла тургандай эркин даражасы n болгон Стьюденттин бөлүштүрүүсүнүн t_n чоңдугу үчүн $z_n(p)$ чекиттеринин маанилери келтирилген.

p n	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	,158	,325	,510	,726	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,7	31,8	63,7	637
2	,142	,289	,445	,617	,816	1,06	1,39	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	,137	,277	,424	,584	,765	,978	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
4	,134	,271	,414	,569	,741	,941	1,19	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	,132	,267	,408	,559	,727	,920	1,16	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	6,87
6	,131	,265	,404	,553	,718	,906	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	,130	,263	,402	,549	,711	,896	1,12	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	5,41
8	,130	,262	,399	,546	,706	,889	1,11	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	,129	,261	,398	,543	,703	,883	1,10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	,129	,260	,397	,542	,700	,879	1,09	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	,129	,260	,396	,540	,697	,876	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	,128	,259	,395	,539	,695	,873	1,08	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	4,32
13	,128	,259	,394	,538	,694	,870	1,08	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	,128	,258	,393	,537	,692	,868	1,08	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	,128	,258	,393	,536	,691	,866	1,07	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	,128	,258	,392	,535	,690	,865	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	,128	,257	,392	,534	,689	,863	1,07	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	,127	,257	,392	,534	,688	,862	1,07	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	,127	,257	,391	,533	,688	,861	1,07	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	,127	,257	,391	,533	,687	,860	1,06	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
21	,127	,257	,391	,532	,686	,859	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	,127	,256	,390	,532	,686	,858	1,06	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	,127	,256	,390	,532	,685	,858	1,06	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	,127	,256	,390	,531	,685	,857	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	,127	,256	,390	,531	,684	,856	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,73
26	,127	,256	,390	,531	,684	,856	1,06	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	,127	,256	,389	,531,	,684	,855	1,06	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	,127	,256	,389	530	,683	,855	1,06	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	,127	,256	,389	,530	,683	,854	1,06	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
30	,127	,256	,389	,530	,683	854	1,06	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	,126	,255	,388	,529	,681	,851	1,05	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	,126	,254	,387	,527	,679	,848	1,05	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	,126	,254	,386	,526	,677	,845	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	,126	,253	,385	,524	.674	,842	1,04	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

6. Колмогоровдун бөлүштүрүү таблицасы

Таблицада $K(y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2y^2}$, $y>0$ функциясынын маанилери келтирилген.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	,0000	,0000	,0000	,0001	,0002	,0003	,0005	,0008	,0013	,0019
0,4	,0028	,0040	,0055	,0074	,0097	,0126	,0160	,0200	,0247	,0300
0,5	,0361	,0428	,0503	,0585	,0675	,0772	,0876	,0987	,1104	,1228
0,6	,1357	,1492	,1632	,1778	,1927	,2080	,2236	,2396	,2558	,2722
0,7	,2888	,3055	,3223	,3391	,3560	,3728	,3896	,4064	,4230	,4395
0,8	,4559	,4720	,4880	,5038	,5194	,5347	,5497	,5645	,5791	,5933
0,9	,6073	,6209	,6343	,6473	,6601	,6725	,6846	,6964	,7079	,7191
1,0	,7300	,7406	,7508	,7608	,7704	,7798	,7889	,7976	,8061	,8143
1,1	,8223	,8300	,8374	,8445	,8514	,8580	,8644	,8706	,8765	,8823
1,2	,8878	,8930	,8981	,9030	,9076	,9121	,9164	,9206	,9245	,9283
1,3	,9319	,9354	,9387	,9418	,9449	,9478	,9505	,9531	,9557	,9580
1,4	,9603	,9625	,9646	,9665	,9684	,9702	,9718	,9734	,9750	,9764
1,5	,9778	,9791	,9803	,9815	,9826	,9836	,9846	,9855	,9864	,9873
1,6	,9880	,9888	,9895	,9902	,9908	,9914	,9919	,9924	,9929	,9934
1,7	,9938	,9942	,9946	,9950	,9953	,9956	,9959	,9962	,9965	,9967
1,8	,9969	,9971	,9973	,9975	,9977	,9979	,9980	,9981	,9983	,9984
1,9	,9985	,9986	,9987	,9988	,9989	,9990	,9991	,9991	,9992	,9992
2,0	,9993	,9994	,9994	,9995	,9995	,9996	,9996	,9996	,9997	,9997
2,1	,9997	,9997	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9998	,9999	,9999

$K(2{,}2)=0{,}999874$; $K(2{,}25)=0{,}999920$;
$K(2{,}3)=0{,}999949$; $K(2{,}35)=0{,}999968$;
$K(2{,}4)=0{,}999980$; $K(2{,}45)=0{,}999988$;
$K(2{,}49)=0{,}999992$

Адабияттар

1. Коршунов Д.А., Чернова Н.И. *Сборник задач и упражнений по математической статистике.* - Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004.
2. Беляев Ю.К., Носко В.П. *Основные понятия и задачи математической статистики.* - М.: Изд-во Московского ун-та, 1998.
3. Бикел П., Доксам К. *Математическая статистика.* Выпуск 1, 2. - М.: Финансы и статистика, 1983.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. *Таблицы математической статистики.* - М.: Наука, 1965.
5. Боровков А.А. *Математическая статистика.* Новосибирск: Наука; Изд-во Института математики, 1997.
6. Ван дер Варден Б. *Математическая статистика.* - М.: Иностр.лит., 1960.
7. *Введение в теорию порядковых статистик.* Под редакцией Е.Сархана и Б. Гринберга. - М.: Статистика, 1970.
8. Дэйвид Г. *Порядковые статистики.* - М.: Наука, 1979.
9. Емельянов Г.В., Скитович В.П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике.* - Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1967.
10. Закс Ш. *Теория статистических выводов.* - М.: Мир, 1975.
11. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Сборник задач по теории вероятностей.* - М.: Наука, 1989.
12. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. *Математичсекая статистика.* - М.: Высшая школа, 1984.
13. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В. *Сборник задач по математической статистике.* - М.: Высшая школа, 1989.
14. Кокс Д., Снелл э. *Прикладная статистика. Принципы и примеры.* - М.: Мир, 1984.
15. Кокс Д., Хинкли Д. *Задачи по теоретической статистике с решениями.* - М.: Мир, 1981.
16. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. *Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.* Новосибирск: Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1997. (2-е изд., испр. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003).
17. Крамер Г. *Математические методы статистики.* - М.: Мир, 1975.
18. Леман Э. *Проверка статистических гипотез.* - М.: Наука,1964.

19. Мешалкин Л.Д. *Сборник задач по теории вероятностей.* - М. Изд-во Московского ун-та, 1963.
20. *Сборник задач по математической статистике.* Учебное пособие под редакцией А.А.Боровкова. - Новосибирск: Новосибирский государственный ун-т, 1989.
21. *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций.* Под редакцией А.А.Свешникова. - М.: Наука, 1965.
22. Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.* - М.: Мир, 1990.
23. Нилкс С. *Математическая статистика.* - М.: Наука, 1967.
24. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т.2. - М.: Мир, 1984.
25. Чибисов Д.М., Пагурова В.И. *Задачи по математической статистике.* - М.: Изд-во Московского ун-та, 1990.

ЖООПТОР

§1. Тандалма жана вариациялык катар

1.1. а), б), г), е-и) болот; в), д) болбойт. **1.2.** б), в), е), ж), и) болот; а), г), д), з) болбойт. **1.3.** а) $a, \sigma^2/n, N_{a,\sigma^2/n}$; б) a; в) $\sigma^2(n-1)/n, \sigma^2$. **1.4.** λ, λ/n, болбойт, болбойт. **1.5.** $(a+b)/2$, $(b-a)^2/12n$, болбойт, болбойт. **1.6.** $U_{0,1}$. **1.7.** $U_{0,1}$. **1.8.** $U_{0,1}$. **1.9.** E_1. **1.10.** $U_{0,1}$. **1.11.** $U_{0,1}$. **1.12.** $P\{Y_1=1-p\}=1-P\{Y_1=0\}=p$. **1.13.** $P\{Y_1=0\}=e^{-\lambda}$; $P\{Y_1=\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i e^{-\lambda}/i!\}=\lambda^k e^{-\lambda}/k!, k\geq 1$. **1.14.** Эгерде $y_1<...<y_n$ болсо, анда $n!f(y_1)\cdot ...\cdot f(y_n)$, антпесе 0. **1.15.** а) $F^n(y)$; б) $1-(1-F(y))^n$. **1.16.** $C_n^k F^k(y)(1-F(y))^{n-k}$. **1.17.** $\sum_{i=k}^n C_n^i F^i(y)(1-F(y))^{n-i}$. **1.18.** а) $n(\theta-y)^{n-1}/\theta^n$; б) ny^{n-1}/θ^n; в) $nC_{n-1}^{k-1}y^{k-1}(\theta-y)^{n-k}/\theta^n$. **1.19.** а) $n(1-F(y))^{n-1}f(y)$; б) $nF^{n-1}(y)f(y)$; в) $nC_{n-1}^{k-1}F^{k-1}(y)(1-F(y))^{n-k}f(y)$. **1.20.** а) $\theta/(n+1), 2\theta^2/(n+1)(n+2), n\theta^2/(n+1)^2(n+2)$; б) $n\theta/(n+1), n\theta^2/(n+2), n\theta^2/(n+1)^2(n+2)$; в) $k\theta/(n+1), k(k+1)\theta^2/(n+1)(n+2), k(n-k+1)\theta^2/(n+1)^2(n+2)$. **1.21.** $P\{X_{(k)}>l\}=\sum_{i=0}^{k-1}C_n^i\left(\sum_{m=0}^{l}p_m\right)\left(\sum_{m=l+1}^{N}p_m\right)^{n-i}$. **1.22.** эгерде $y<z$ болсо, анда $P\{X_{(1)}<y, X_{(n)}<z\}=F^n(z)-(F(z)-F(y))^n$, антпесе $P\{X_{(1)}<y, X_{(n)}<z\}=F^n(z)$. **1.23.** а) $0\leq y<z\leq\theta$ болгондо $n(n-1)(z-y)^{n-2}/\theta^n$; б) $\theta^2/(n+1)^2(n+2)$; в) $0\leq y<z\leq\theta$ болгондо $n(n-1)C_{n-2}^{k-1}C_{n-k-1}^{j-k-1}y^{k-1}(z-y)^{j-k-1}(\theta-z)^{n-j}/\theta^n$; г) $k(n-j+1)\theta^2/(n+1)^2(n+2)$. **1.24.** б) $E_{n\alpha}$; в) $E_{(n-k)\alpha}$. **1.28.** а), б) E_1. **1.30.** а), б) $\Gamma_{1,k}$. **1.31.** Координаталары көз карандысыз болгон вектор, биринчи координатасы $\Gamma_{1,k}$, экинчиси - $\Gamma_{1,j}$ бөлүштүрүүсүнө ээ. **1.32.** $(\xi_1, \xi_1+\xi_2)$ вектору, мында ξ_1 жана ξ_2 лер көз карандысыз жана $\Gamma_{1,k}$, $\Gamma_{1,j-k}$ бөлүштүрүүлөрүнө ээ. **1.34.** Орточо маанилердин нөлдүк вектору; $p(1-p)$ жана $s(1-s)$ дисперсиялары; $p(1-s)$ ковариациясы. **1.35.** Бөлүштүрүүнүн пределдик функциясы $e^{-e^{-x}}, x\in R$ га барабар.

§2. Бөлүштүрүүнүн эмпирикалык функциясы

2.3. $y\leq 0$ болгондо $F_n^*(y)=0$, $0<y\leq 1$ болгондо $F_n^*(y)=1-\overline{X}$ жана $y>1$ болгондо $F_n^*(y)=1$. **2.4.** $(1,1,5,7,8,8)$, $(1,5;1,7,8,8)$. **2.5.** Жок, ооба, жок, жок. **2.6.** Ооба; $(X_1/a,...,X_n/a)$. **2.8.** а) Ооба, $(\sqrt[3]{X_1},...,\sqrt[3]{X_n})$; б) ооба, $X_{(k)}$ $k^3-(k-1)^3$ жолу кайталанган n^3 көлөмдүү тандалма. **2.9.** Ооба; $(X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_n)$ бириктирилген тандалмасына. **2.12.** а) $F(y)$; б) $F(y)(1-F(y))/n$; в) эгерде $y<z$ болсо, $(F(z)-F(y))(1-F(z)+F(y))/n$. **2.13.** $y\in\{0,...,m\}$ болсо $C_n^k(C_m^y p^y(1-p)^{m-y})^k(1-C_m^y p^y(1-p)^{m-y})^{n-k}$; антпесе - 0. **2.14.** Эгерде $y<z$ болсо, анда $1-(1-F(z)+F(y))^n$. **2.15.** 0. **2.21.** $c_n=n(1-1/e^2), N_{0,1/e^2-1/e^4}$; $c_n=n(1-1/e^2)+13\sqrt{n}, N_{-13,1/e^2-1/e^4}$.

§3. Моменттер методу

3.1. а) $\overline{X}$; б) $\overline{X^2}-a^2$; в) $\overline{X}, S^2$. **3.2.** а) $(\pi/2)(\overline{|X-a|})^2$; б) $\overline{(X-a)^2}$. **3.3.** а) $\max(0,\overline{X})$, $\sqrt{1+\overline{X^2}}-1$; б) $\max(0,\overline{X})$, $\sqrt{\overline{X^2}/2}$. **3.4.** $\sqrt[k]{\overline{X^{2k}}/(2k-1)!!}$. **3.5.** а) $2\overline{X}$; б), в) $\overline{X}$; г) $\sqrt{3\overline{X^2}}$. **3.6.** а) $a^*=\overline{X}-\sqrt{3S^2}, b^*=\overline{X}+\sqrt{3S^2}$; б) $a^*=\overline{X}-\sqrt{3S^2}, b^*=2\sqrt{3S^2}$. **3.7.** $\sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}}$. **3.8.** $1/\overline{X}$. **3.9.** $\overline{X}-1$. **3.10.** $\alpha^*=\sqrt{S^2}$, $\beta^*=\overline{X}-\sqrt{S^2}$. **3.11.** а) $\sqrt[k]{k!/\overline{X^k}}$; б) $\sqrt[k]{\overline{X^k}/k!}$. **3.12.** $y^2, \sqrt{2/\overline{X^2}}$. **3.13.** $(\overline{X})^2$. **3.14.** $e^{-1/\overline{X}}$. **3.15.** а) $\alpha^*=\beta/\overline{X}$; б) $\beta^*=\alpha\overline{X}$; в) $\alpha^*=\overline{X}/S^2, \beta^*=(\overline{X})^2/S^2$. **3.16.** а) $\overline{X}/(\overline{X}-\theta)$; б) $\overline{X}/(1-1/\beta)$; в) $\beta^*=1+\sqrt{1+(\overline{X})^2/S^2}, \theta^*=\overline{X}(1-1/\beta^*)$. **3.17.** $1/\overline{X^\alpha}$. **3.19.** $\sqrt[k]{\overline{X^k}/\Gamma(1+k/3)}$. **3.20.** а) $\overline{X}/(1-\overline{X})$; б) $3\overline{X}/2$. **3.21.** Жок. **3.22.** $\overline{X}$. **3.23.** Жок. **3.24.** а) $\overline{X}/m$; б) $\overline{X}/p$ санына жакын бүтүн сан; в) $m_n^*=(\overline{X})^2/(\overline{X}-S^2)$ санына жакын бүтүн сан, $p_n^*=1-S^2/\overline{X}$. **3.25.** $e^{\overline{X}}$. **3.26.** а) $\overline{X}$; б) $\sqrt{\overline{X^2}+1/4-1/2}$. **3.27.** $e^{\overline{X}}$. **3.28.** $\theta_n^*=\overline{I\{X=1\}}$. **3.29.** $1/(\overline{X}+1)$. **3.30.** Эгерде $a\le\overline{X}\le b$ болсо, $\theta_n^*=(b-\overline{X})/(b-a)$; эгерде $\overline{X}<a$ болсо, 0; эгерде $\overline{X}>b$ болсо, 1. **3.31.** Лаплас бөлүштүрүүсүнүн α параметри үчүн.

§4. Чындыкка жакындыктын максималдуу методу

4.1. $\overline{X}, S^2$. **4.2.** $\overline{(X-a)^2}$. **4.3.** а) $\sqrt{1+\overline{X^2}}-1$; б) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\overline{X})^2+4\overline{X^2}}-\overline{X}\right)$. **4.4.** $X_{(n)}$. **4.5.** а) $-X_{(1)}$; б) $\max\{-X_{(1)},X_{(n)}\}=\max\{|X_i|\}$; в) $[X_{(n)}-2, X_{(1)}]$ кесиндисинин каалаган чекити; г) $X_{(n)}/2$. **4.6.** $a_n^*=X_{(1)}, b_n^*=X_{(n)}$. **4.7.** $1/\overline{X}$. **4.8.** $X_{(1)}$. **4.9.** $\alpha_n^*=\overline{X}-X_{(1)}, \beta_n^*=X_{(1)}$. **4.10.** Тандалма медиана. **4.11.** $\mu^*=$тандалма медиана, $\sigma^*=n^{-1}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu^*|$. **4.12.** $\alpha^*=\beta/\overline{X}$. **4.13.** а) $1/(\overline{\ln X}-\ln\theta)$; б) $X_{(1)}$; в) $(1/\overline{\ln X}-\ln X_{(1)}, X_{(1)})$. **4.14.** $1/\overline{X^\alpha}$. **4.15.** $\sqrt[3]{\overline{X^3}}$. **4.16.** $\overline{g(X)}$. **4.17.** а) $-1/\overline{\ln X}$; б) $X_{(n)}$; в) $1/\sqrt{\overline{X^{-1}}}$; г) $-1/\overline{\ln\ln X}$; д) $\max\limits_{1\le i\le n}\{|X_i|\}$. **4.18.** а) X_1; б) эгерде $|X_1-X_2|\le 2$ болсо, $(X_1+X_2)/2$, антпесе (эгерде $|X_1-X_2|>2$ болсо) $(X_1+X_2)/2\pm\sqrt{(X_1-X_2)^2/4-1}$. **4.19.** $\overline{X}$. **4.20.** а) $\overline{X}/m$; б) эгерде X_1/p бүтүн эмес болсо, анда $[X_1/p]$, эгерде X_1/p бүтүн болсо, анда $X_1/p-1$ же X_1/p. **4.21.** $\overline{X}$. **4.22.** $1/(\overline{X}+1)$. **4.23.** $p_n^*=\nu_n/(n\overline{X}+\nu_n)$, мында ν_n - тандалманын m ден айырмалуу элементтеринин саны. **4.24.** $X_{(n)}$. **4.25.** Эгерде $\overline{X}<3/2$ болсо, анда $a_n^*=1$, эгерде $\overline{X}\ge 3/2$ болсо, анда $a_n^*=2$. **4.26.** Эгерде $\overline{X}>\ln 2$ болсо, анда $\theta^*=1$, эгерде $\ln 3/2<\overline{X}<\ln 2$ болсо, анда $\theta^*=2$, эгерде $\overline{X}<\ln 3/2$ болсо, анда $\theta^*=3$. **4.27.** $\overline{I\{X\ne 3\}}/3$. **4.28.** X_1. **4.30.** $U_{\theta,\theta+7}$. **4.31.** $U_{\theta,\theta+7}$.

§5. Байестик баалоолор

5.2. $\frac{n\overline{X}\sigma^2+b}{n\sigma^2+1}$. **5.3.** $\left(1+e^{n/2-n\overline{X}}\right)^{-1}$. **5.4.** а) $\frac{n+1}{n}\cdot\max(X_{(n)},1)$; б) $\frac{n-1}{n-2}\frac{X_{(n)}-X_{(n)}^{n-1}}{1-X_{(n)}^{n-1}}$.

5.5. Эгерде $X_{(n)}\le 1$ болсо, анда $\theta_n^*=1+(1+2^n)^{-1}$; эгерде $1<X_{(n)}\le 2$ болсо, анда $\theta_n^*=2$. **5.6.** $(n+1)/(n\overline{X}+\beta)$. **5.7.** $ae^{na}/(e^{na}-1)-1/n$, мында $a=\min(1,X_{(1)})$.

5.8. а) $\frac{2n-1}{2n-2}\frac{X_{(n)}^{2n-1}-X_{(n)}}{X_{(n)}^{2n-1}-1}$; б) $\frac{2n-3}{2n-4}\frac{X_{(n)}^{2n-3}-X_{(n)}}{X_{(n)}^{2n-31}-1}$; в) $\max(X_{(n)},1)\cdot\frac{\beta+2n}{\beta+2n-1}$.

5.9. $(n\overline{X}+1)/(n+2)$. **5.10.** $(2^{2n+1-n\overline{X}}+3^{n+1})/6(2^{2n-n\overline{X}}+3^n)$. **5.11.** $(n\overline{X}+\lambda)/(n+1+\lambda)$.

5.12. $(n\overline{X}+1)/(n+1)$. **5.13.** $(e^n+2^{n\overline{X}+2})/(e^n+2^{n\overline{X}+1})$.

5.14. $(3^{n\overline{X}}+4\cdot 2^{n\overline{X}}+9)/4(3^{n\overline{X}}+2\cdot 2^{n\overline{X}}+3)$.

§6. Жылышпастык жана абалдуулук

6.1. Жылышуучу жана абалдуу. **6.2.** а), г), д) Жылышпас жана абалдуу; б) жылышуучу жана абалдуу; в) жылышпас жана абалсыз. **6.4.** Жок; ооба. **6.5.** Жок; ооба. **6.6.** Жок; ооба. **6.9.** Ооба; ооба (ооба). **6.10.** Жок; S_0^2.

6.11. а), б), в) Жылышпас жана абалдуу; г) жылышуучу жана абалдуу.

6.12. Жылышпас жана абалдуу. **6.13.** Жылышпас жана абалдуу.

6.15. а) $814{,}86м^2$; б) $921{,}84м^2$. 6.16. **Жылышпас жана абалдуу. 6.17.** Жылышпас, абалдуу. **6.18.** а), б) Ооба, ооба. **6.19.** Жок, $\alpha/(n-1)$; ооба. **6.20.** $\theta=e^{1/\alpha}$; жок.

6.21. Жок; ооба. **6.22.** Каалаган k да жылышуучу жана абалдуу.

6.23. а) Жылышпуучу, абалдуу; б) жылышпас, абалдуу. **6.24.** Бардык төрт баалоо тең жылышуучу жана абалдуу. **6.25.** Абалдуу. **6.26.** Экөө тең жылышуучу жана абалдуу. **6.27.** Жылышуучу жана абалдуу. **6.28.** Жок.

6.29. Абалдуу жана жылышпас. **6.30.** Жок; ооба. **6.32.** Жок.

6.33. $b_n(p)=(\alpha-p\beta)/(n+\beta), E(p_n^*-p)^2=(np(1-p)+(\alpha-p\beta)^2)/(n+\beta)^2$. 6.34. $\theta=e^{2p}$; жок. **6.35.** Экинчиси – ооба, биринчи жана үчүнчү - жок. **6.36.** $\theta=\lambda^5$; жок.

6.37. $\theta=\lambda e^{-\lambda}$, жок. **6.38.** $\theta=\lambda e^{-\lambda}$, ооба. **6.39.** Жок; ооба. **6.41.** а) $\frac{n+3}{n+4}\overline{X}$; б) $(X_1+X_3)/2$. **6.43.** Жок; ооба. **6.44.** Жок; ооба. **6.45.** Жылышуучу жана абалдуу. **6.46.** Жылышпас жана абалдуу. **6.48.** $B_{1/2},\delta=1/2$. **6.49.** Жылышпас, абалдуу. **6.51.** $\theta^3/3$. **6.53.** $\theta*$ бөлүштүрүүсү кубулбаган, ал эми f функциясы Θ көптүгүндө сызыктуу болбойт. **6.54.** а) $U_{0,\theta}, g(y)=y^9$; б) B_p; в) $П_\lambda, \lambda^*=X_7$; г) $П_\lambda, \lambda_n^*=\overline{X}+1/n$.

§7. Асимптотикалык нормалдуулук

7.1. DX_1. **7.2.** $Dg(X_1)$. **7.3.** $D(X_1-a)^2$. **7.6.** $4\sigma^2\theta^2$. **7.7.** $\theta \neq 0$ болгондо гана. **7.10.** Ооба; $\sigma^2(\pi/2-1)$. **7.11.** Ооба; $4\sigma^4$. **7.12.** $\theta^2/(2k+1)$. **7.13.** Жок. **7.14.** Жок. **7.15.** $1/27$. **7.16.** $\theta=\ln(a/2), \sigma^2(a)=1/3$. **7.17.** $\frac{(2k)!-(k!)^2}{k^2(k!)^2}\alpha^2$. **7.18.** 1. **7.19.** $\theta=e^{-2/\alpha^2}, \sigma^2(\alpha)=20e^{-4/\alpha^2}/\alpha^4$. **7.20.** а) Жок; б) ооба, 1. **7.21.** а) α^* - ооба, $2\alpha^2$; б) α^* - ооба, α^2, β^* - жок. **7.22.** β_n^* - ооба, $\sigma^2(\beta)=\beta^2$; θ_n^* - жок. **7.23.** Ооба, θ^2. **7.24.** $1/4$. **7.25.** 1. **7.26.** $\theta=e^{mp}, \sigma^2(m,p)=mp(1-p)e^{2mp}$. **7.27.** λ. **7.28.** $1/4$. **7.29.** $\theta=\lambda e^{-\lambda}, \sigma^2(\lambda)=\lambda(1-\lambda)^2e^{-2\lambda}$. **7.30.** $\overline{X}+5/\sqrt[5]{n}$. **7.31.** Ооба, $p^2(p-1)$. **7.32.** $N_{0,9\sigma^2}$. **7.35.** θ^2. **7.36.** $\pi^2/4$. **7.37.** $1/\alpha^2$. **7.38.** $1/4f^2(\zeta)$. **7.39.** $\delta(1-\delta)/f^2(\zeta_\delta)$. **7.40.** $F(y)(1-F(y))$.

§8. Орточо квадраттык ыкма

8.1. Экинчи баалоо жакшы. **8.2.** $DS_0^2=2\sigma^4/(n-1), DS_1^2=2\sigma^4/n$. **8.3.** $DS_0^2=2\sigma^4/(2n-1), D(\sigma^2)_{2n}^*=2\sigma^4/n$. **8.4.** $c_n=1/(n+1)$; жылышуу $=-2\sigma^2/(n+1)$. **8.5.** Орточо квадраттык четтөө: $\theta^2/3n, 2\theta^2/(n+1)(n+2), \theta^2/n(n+2), 2\theta^2/(n+1)(n+2)$. **8.6.** $\theta_{1,n}^*$ - эң жакшы; $\theta_{2,n}^*$ караганда $\theta_{0,n}^*$ жакшы; $k \geq 2$ болгондо $\theta_{k+1,n}^*$ караганда $\theta_{k,n}^*$ жакшы. **8.7.** $c_n=(n+2)/(n+1)$; жылышуу $=-1/(n+1)^2$. **8.8.** Орточо квадраттык мааниде эң жакшы болуп $a=(n+1)(5n+4), b=2a, E_\theta(\theta^*-\theta)=1/(n+2)(5n+4)$. **8.9.** а) Экинчи жана үчүнчүлөр орточо квадраттык мааниде эквиваленттүү жана биринчисине караганда жакшы; б) $(X_{(1)}+X_{(n)}-1/2$. **8.10.** $E(\overline{X}-1-\theta)^2=1/n, E(X_{(1)}-\theta)^2=2/n^2, E(X_{(1)}-1/n-\theta)^2=1/n^2$. **8.11.** Мисалы, $\lambda_1^*=(X_1+X_2)/2$ орточо квадраттык мааниде $\lambda_2^*=X_1$ га караганда жакшы. **8.12.** Параметри $\theta \in (0,1), \theta_1^*=\overline{X}+33, \theta_2^*=X_1$, болгон Бернулли бөлүштүрүүсү.

§9. Асимптотикалык ыкма

9.1. Экинчи баалоо жакшы. **9.2.** Орточо жакшы. **9.3.** Тандалма медианасы жакшы. **9.4.** Жок. **9.5.** Орточосу жакшы. **9.6.** $k=1$ болгондо ооба.

§10. Жетиштүү статистикалар

10.1. $(x_1,...,x_n)$ чекитинде кубулган; а), б) ооба.

10.3. $P\{X_1 \in B_1,...,X_n \in B_n \mid n\overline{X}=y$ шарттуу бөлүштүрүүсү диагоналдык элементтери $\sigma_{ii}^2=(n-1)/n$, диагоналдык эмес элементтери $\sigma_{ii}^2=-1/n, i \neq j$ болгон σ^2 ковариацияларынын кубулган матрицасы жана $(y/n,...,y/n)$ орточолор вектору менен берилген нормалдуу бөлүштүрүү болуп саналат. Берилген шарттуу бөлүштүрүү $(\xi_1,...,\xi_n)\cdot\sigma^2+(y/n,...,y/n)=(\xi_1-\overline{\xi}+y/n,...,\xi_n-\overline{\xi}+y/n)$ векторунун бөлүштүрүүсү менен дал келе тургандай σ^2 дан алынган тамыр σ^2

менен дал келет, мында ξ_i - булар стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүгө ээ болушкан көз карандысыз кокустук окуялар; ооба. **10.4.** $\overline{X^2}$. **10.5.** а) Жок; б) ооба; в) жок. **10.6.** $(\overline{X},\overline{X^2})$. **10.7.** $X_{(n)}$. **10.8.** Жок, жок, ооба. **10.9.** а), б) $(X_{(1)},X_{(n)})$. **10.10.** $\max\{-X_{(1)},X_{(n)}\}=\max|X_i|$. **10.11.** $2X_{(1)}$; жок. **10.12.** а) $X_{(1)}$; б) $\overline{X}$; в) $(X_{(1)},\overline{X})$. **10.13.** Ооба; параметрлери $n\beta/\theta$ жана $n\beta$ болушкан Γ - бөлүштүрүү; ооба. **10.14.** $(\overline{X},\overline{\ln X})$. **10.15.** а) $\overline{\ln X}$; б) $X_{(1)}$; в) $(\overline{\ln X},X_{(1)})$.
10.16. $(\overline{\ln X},\overline{X^\alpha})$. **10.17.** $\overline{\ln X}$. **10.18.** Ооба. **10.19.** Эгерде $k_1+...+k_n=k$ болсо, анда $P\{\overline{X}=(k_1,...,k_n)\,|\,n\overline{X}=k\}=\prod_{i=1}^n C_n^{k_i}/C_{nm}^k$; ооба. **10.20.** Эгерде $k_1+...+k_n=k$ болсо $P\{\overline{X}=(k_1,...,k_n)\,|\,n\overline{X}=k\}=\dfrac{k!}{k_1!\cdot...\cdot k_n!}\dfrac{1}{n^k}$ полиномиалдык бөлүштүрүүсү; $\overline{X},(\overline{X})^2,\sin\overline{X}$ - жетиштүү (себеби 2π саны иррационалдуу), $\overline{X^2}$ - жок.
10.21. а), в), г), д), е) Ооба; б) жок. **10.23.** Эгерде $k_1+...+k_n=k$ болсо, анда $P\{\overline{X}=(k_1,...,k_n)\,|\,n\overline{X}=k\}=1/C_{n+k-1}^k$ - бул $\{(k_1,...,k_n):\sum k_i=k\}$ натуралдык сандар көптүгүндөгү бирдей ыктымалдуу бөлүштүрүү. **10.25.** $X_{(n)}$.

§11. Толук статистикалар

11.6. в) $(X_{(1)},\overline{X})$. **11.7.** Жок.

§12. Эффективдүү баалоолор

12.1. $\theta^*/(\alpha+1)$. **12.3.** $\overline{X},N(a,1/n)$; ооба. **12.4.** $\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$. **12.5.** Жылышуу 0, дисперсия $\theta^2/12$; жакшыртылган баалоо $\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$, жылышуу 0, дисперсия $\theta^2/n(n+2)$, ооба. **12.6.** $(1-(n-1)y/nX_{(n)})I\{X_{(n)}\geq y\}$. **12.7.** $(n-1)n\overline{X}$. **12.8.** $X_{(1)}-1/n$.
12.9. а) $X_{(1)}-\alpha/n$; б) $\overline{X}-\beta$; в) $\alpha^*=(n-1)(\overline{X}-X_{(1)})/n,\beta^*=(nX_{(1)}-\overline{X})/(n-1)$.
12.10. $(1-1/n\beta)X_{(1)}$. **12.11.** $\overline{X^\alpha}$. **12.12.** а) $\overline{g(X)}$; б) $\overline{(g(X)-\theta)^2}$. **12.13.** $-\overline{\ln X}$.
12.14. $\overline{X}$. **12.15.** а) Жылышуу $p(m-1)$, дисперсия $mp(1-p)$; $\overline{X}$, жылышуу $p(m-1)$, дисперсия $mp(1-p)/n$; жылышуусу $p(m-1)$ болгон баалоолор классында эффективдүү. б) Жылышуу 0, дисперсия $p(1-p)/m$; $\overline{X}/m$, жылышуу 0, дисперсия $p(1-p)/nm$; жылышпас баалоолор классында эффективдүү. **12.16.** $\overline{X}$, жылышуу 0, дисперсия λ/n; ооба.
12.17. $b_n(\theta)=0,\theta_n^*=(1-1/n)^{n\overline{X}}$. **12.18.** в) 0; $(n-1)/(n\overline{X}+n-1)$.

§13. Рао-Крамер барабарсыздыгы

13.1. а) Баалоого эркин турактууну кошу менен: дисперсия өзгөрбөйт, $b'(\cdot)$ өзгөрбөйт жана $b(\cdot)$ эркин өзгөрөт; б) турактуу маанини кабыл алган баалоо нөлдүк дисперсияга ээ жана $b'(\cdot)=-1$; в) чек ара терс эмес болушу керек.

13.2. $n\theta_n^* /(n+1)$. **13.3.** $[3,\theta+5]$ кесиндисиндеги бир калыптагы бөлүштүрүүнүн θ параметри үчүн максималдуу чындыкка жакындык баалоосу. **13.4.** Жок. Мурдагы мисалда $D\theta_n^* \approx c/n^2$. **13.5.** а), г), е), ж), и) Ооба; б), в), д), з) жок.

13.6. R - эффективдүү. **13.7.** а) R - эффективдүү; б) жок. **13.8.** а-в) Жок; жок. **13.9.** Жок. **13.10.** Жок; ооба. **13.11.** Ооба; ооба. **13.12.** Жок; жок; жок; ооба. **13.13.** Жок; ооба. **13.14.** Жок. **13.15.** б) $\pi^2 3n$; в) $1/3$; г) болбойт. **13.20.** R - эффективдүү. **13.21.** R - эффективдүү. **13.22.** R - эффективдүү. **13.23.** 0; жок. **13.24.** Ооба. **13.26.** а-е)Ооба; ж) жок.

§14. Ишенимдүү интервалдар

14.1. $(\overline{X}-\sigma\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n},\overline{X}+\sigma\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. **14.2.** $(nS_1^2/\zeta_{1-\varepsilon/2},nS_1^2/\zeta_{\varepsilon/2})$, мында ζ_δ - бул эркин даражасы n болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнүн δ деңгээлдүү квантили. **14.3.** $(n(\overline{X}-a)^2/\zeta_{1-\varepsilon/4}^2,n(\overline{X}-a)^2/\zeta_{0,5+\varepsilon/4}^2)$ мында ζ_δ - бул стандарттуу нормалдуу бөлүштүрүүнүн δ деңгээлдүү квантили. **14.4.** $c=1$. **14.5.** $c=2$.

14.6. $c=2$. **14.7.** a үчүн: $(\overline{X}-S_0\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n},\overline{X}+S_0\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул эркин даражасы $n-1$ болгон Стьюдент бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили, $S_0=\sqrt{S_0^2}$. σ^2 үчүн: $(nS^2/\zeta_{1-\varepsilon/2},nS^2/\zeta_{\varepsilon/2})$, мында ζ_δ - бул эркин даражасы $n-1$ болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнүн δ деңгээлдүү квантили.

14.9. $(1/\ln 20,1/(\ln 20-\ln 19))$. **14.10.** а) $(2\overline{X}-\sqrt{1/3n\varepsilon},2\overline{X}+\sqrt{1/3n\varepsilon})$;

б) $(X_{(n)},X_{(n)}+1/(n+1)\varepsilon)$. **14.11.** $(X_1,X_1/\varepsilon)$. **14.12.** $(X_{(n)},X_{(n)}/\sqrt[n]{\varepsilon})$.

14.14. а) $(X_{(1)}-1+\sqrt[n]{\varepsilon},X_{(1)})$; б) $(X_{(1)}/(2-\sqrt[n]{\varepsilon}),X_{(1)})$. **14.15.** $(X_{(1)}+(\ln\varepsilon)/n,X_{(1)})$.

14.16. $(0,-(\ln\varepsilon)/X_1)$; $(0,-(\ln\varepsilon)/nX_1)$.

§15. Асимптотикалык ишенимдүү интервалдар

15.1. $(\overline{X}-\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}/\sqrt{n},\overline{X}+\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. **15.2.** $(0,061;0,139)$.

15.3. $(\overline{X}/m-\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X}/m)}/\sqrt{n},\overline{X}/m+\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X}/m)}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.

15.4. $(\overline{X}-\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}}/\sqrt{n},\overline{X}+\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.

15.5. $\left(p_n^*-\dfrac{\zeta_{1-\varepsilon/2}p_n^*\sqrt{1-p_n^*}}{\sqrt{n}},p_n^*+\dfrac{\zeta_{1-\varepsilon/2}p_n^*\sqrt{1-p_n^*}}{\sqrt{n}}\right)$, мында $p_n^*=1/(1+\overline{X})$ жана $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.

15.6. $(\overline{X}-\zeta_{1-\varepsilon/2}\sigma(\overline{X})/\sqrt{n},\overline{X}+\zeta_{1-\varepsilon/2}\sigma(\overline{X})/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.

15.7. $(\theta_n^*-\zeta_{1-\varepsilon/2}\sigma(\theta_n^*)/\sqrt{n},\theta_n^*+\zeta_{1-\varepsilon/2}\sigma(\theta_n^*)/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. **15.8.** $(X_{(n)},nX_{(n)}/(n+\ln\varepsilon))$.

15.9. $(\theta_1^{\bullet}-\theta_1^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{3n},\theta_1^{\bullet}+\theta_1^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{3n})$ жана $(\theta_2^{\bullet}-\theta_2^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{5n},\theta_2^{\bullet}+\theta_2^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{5n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.
15.10. $(\alpha_1^{\bullet}-\alpha_1^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n},\alpha_1^{\bullet}+\alpha_1^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n})$ жана $(\alpha_2^{\bullet}-\sqrt{5/4}\alpha_2^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n},\alpha_2^{\bullet}+\sqrt{5/4}\alpha_2^{\bullet}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.
15.11. $(\overline{X}-1-\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n},\overline{X}-1+\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.
15.12. $(\beta^*-\beta^*/\sqrt{n},\beta^*+\beta^*\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{n})$, мында $\beta^*=1/(\overline{\ln X}-\ln X_{(1)})$.
15.13. $(\zeta^*-\sigma\sqrt{\pi}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{2n},\zeta^*+\sigma\sqrt{\pi}\zeta_{1-\varepsilon/2}/\sqrt{2n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили; $\overline{X}$ боюнча тургузулган интервал кыскараак. **15.14.** $(\zeta^*-\pi\zeta_{1-\varepsilon/2}/2\sqrt{n},\zeta^*+\pi\zeta_{1-\varepsilon/2}/2\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. **15.15.** $(\sigma_n^{\bullet}-2(\sigma_n^{\bullet})^2\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\pi/2-1}/\sqrt{n},\sigma_n^{\bullet}+2(\sigma_n^{\bullet})^2\zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\pi/2-1}/\sqrt{n})$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.

§16. Эки жөнөкөй гипотезаны ажыратуу: негизги түшүнүктөр

16.1. $1-(1-\overline{\Phi}(3))^n\approx1-0{,}99865^n$; $1-(1-\overline{\Phi}(2))^n\approx0{,}977^n$. **16.2.** $\gamma>-1/2$.
16.3. Эгерде тандалманын жок дегенде бир элементинин мааниси бүтүн болсо, негизги гипотеза четке кагылат. **16.4.** а) $0,\overline{\Phi}(2)$; б), в) $0,1/2$.
16.5. $n>(\ln(1-\gamma))/(\ln 4-3)$. **16.6.** $\overline{\Phi}(4)\approx0{,}000032$.

§17. Байестик жана минимакстык критерийлер

17.1. Эгерде $\overline{X}<(a_1+a_2)/2$ болсо, анда $a=a_1$ гипотезасы, антпесе $a=a_2$ альтернативасы кабыл алынат. **17.2.** а) Эгерде $\overline{X}>3/2$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(1,0)$, антпесе $\delta(\overline{X})=(0,1)$; $\delta(3)=(0,1)$; б) Эгерде $\overline{X}<3/2$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(1,0,0)$; эгерде $3/2\le\overline{X}<5/2$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(0,1,0)$; эгерде $5/2\le\overline{X}$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(0,0,1)$; $\delta(3)=(0,0,1)$. **17.3.** Эгерде $\overline{X}>\ln 2$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(1,0,0)$; эгерде $\ln 3/2<\overline{X}\le\ln 2$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(0,1,0)$; эгерде $\overline{X}\le\ln 3/2$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(0,0,1)$. **17.4.** Эгерде $\overline{X}<9n-1)(\ln 2)/n(\ln 3-\ln 2)$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(1,0)$. **17.5.** Эгерде $\overline{X}<m/2-1/n$ болсо, анда $\delta(\overline{X})=(1,0)$. **17.6.** Эгерде $X_1<(a_1+a_2)/2$ болсо, $\{a=a_1\}$ гипотезасы, антпесе $\{a=a_1\}$ альтернативасы кабыл алынат.

§18. Кубаттуурак критерийлер

18.1. Мисал үчүн, $X_1<0$ болгондо - негизги гипотезаны жана $X_1\ge0$ болгондо – альтернативаны кабыл алуучу критерий. **18.2.** Эгерде $X_1<\sqrt{\varepsilon}$ болсо, анда $\delta=1$; $\beta(\delta)=(1-\sqrt{\varepsilon})^2$. **18.3.** а) Эгерде $X_1>1-\varepsilon$ болсо, анда $\delta=1$; б) эгерде $X_1X_2>t$ болсо, анда $\delta=1$, мында t - бул $t(1-\ln t)=1-\varepsilon$ теңдемесинин чечими. **18.4.** Эгерде $X_1>1/2$ болсо, анда $\delta=0$; эгерде $X_1\le1/2$ болсо, анда

$\delta = 1/2$. **18.5.** Эгерде $X_1 \in (\varepsilon, 1)$ болсо, анда $\delta = 0$; антпесе $\delta = 1$; $\beta(\delta) = 1 + 1/e - 1/e^{\varepsilon}$. **18.6.** Эгерде $X_1 = 0$ болсо, анда $\delta = 0$; антпесе $\delta = 1$; $\beta(\delta) = 1 - e^{-2}$. **18.7.** Эгерде $X_1 \in (a, 1] \cup [3/2, 2]$ болсо, анда $\delta = 1$; антпесе $\delta = 0$; мында $a = -\frac{1}{2}\ln(1/3 - e^{-3} + e^{-4} + e^{-2}) \approx 0{,}413685$. **18.8.** Эгерде $X_1 \in [3/2, 2]$ болсо, анда $\delta = 0$; эгерде $X_1 \in [1, 3/2]$ болсо, анда $\delta = 1/3$; эгерде $X_1 \in [0, 1]$ болсо, анда $\delta = 1$. **18.9.** Эгерде $X_1 = 0$ болсо, анда $\delta = 0$; эгерде $X_1 = 1$ болсо, анда $\delta = 2/5$; эгерде $X_1 = 2$ болсо, анда $\delta = 1$. **18.10.** Эгерде $\overline{X} = 0$ болсо, анда $\delta = 0$; $n = 459$; кубаттуураак критерий: эгерде $\overline{X} > 0$ болсо, анда $\delta = 1$; антпесе $\delta = 0{,}01$ $n = 458$. **18.11.** Эгерде эки бештик түшсө, анда гипотеза четке кагылат. **18.12.** Эгерде $X_1 \in [1/2, 1]$ болсо, анда $\delta = 1$; эгерде $X_1 = 0$ болсо, анда $\delta = 1/2$; эгерде $X_1 \in (0, 1/2)$ болсо, анда $\delta = 0$; $\varepsilon \in (1/4, 3/4)$. **18.13.** Эгерде $\overline{X} \geq a_1 + \sigma\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}$ болсо, анда $\delta = 1$, мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү квантили; абалдуу. **18.14.** $H_1 = \{\sigma^2 = \sigma_1^2\}, H_2 = \{\sigma^2 = \sigma_2^2\}, \sigma_2^2 < \sigma_1^2$; эгерде $\overline{X^2} < \sigma_1^2\zeta_{\varepsilon}/n$ болсо, анда $\delta = 1$; мында ζ_{ε} - бул эркин даражасы n болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнүн ε деңгээлдүү квантили. **18.15.** $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ болгондо критикалык область $\sum_{i=1}^{n}(X_i + (a_2\sigma_1^2 - a_1\sigma_2^2)/(\sigma_2^2 - \sigma_1^2))^2 > c$. **18.16.** Эгерде $\overline{X} < 1/\alpha_1 + \zeta_{\varepsilon}/\alpha_1\sqrt{n}$ болсо, анда $\delta = 1$; мында ζ_{ε} - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн ε деңгээлдүү квантили; 1. **18.17.** Эгерде $\overline{X} > \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1}\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}$ болсо, анда $\delta = 1$; мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү квантили; 1. **18.18.** Эгерде $\overline{X} > mp_1 + \sqrt{mp_1(1-p_1)}\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}$ болсо, анда $\delta = 1$; мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү квантили; 1. **18.19.** Эгерде $\overline{X} < (1-p_1)/p_1 + (1-p_1)\zeta_{\varepsilon}/p_1^2\sqrt{n}$ болсо, анда $\delta = 1$; мында ζ_{ε} - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн ε деңгээлдүү квантили; 1. **18.20.** Эгерде $X_1 \geq s$ болсо, анда $\delta = 1$, антпесе $\delta = 0$; p_2^s. **18.21.** $1/2$.

§19. Бир калыпта кубаттуурак критерийлер

19.2. Эгерде $\overline{(X-a)^2} < \sigma_1^2\zeta_{\varepsilon}/n$ болсо, анда $\delta = 1$, антпесе $\delta = 0$; мында ζ_{ε} - бул эркин даражасы n болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнүн ε деңгээлдүү квантили. **19.3.** Эгерде $\overline{X} > 1/\alpha_1 + \zeta_{\varepsilon}/\alpha_1\sqrt{n}$ болсо гипотеза кабыл алынат, мында ζ_{ε} - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн ε деңгээлдүү квантили. **19.4.** а) Эгерде $X_{(1)} \in [\beta_1, \beta_1 - (\ln\varepsilon)/n]$ болсо гипотеза кабыл алынат; б) эгерде $\beta_1 \leq X_{(1)} \leq \overline{X} \leq \beta_1 + \alpha_1\zeta_{1-\varepsilon}/n]$ болсо гипотеза кабыл алынат, мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул $\Gamma_{1,n}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү квантили. **19.5.** Эгерде $X_{(n)} \in [\sqrt[n]{\varepsilon}\theta_0, \theta_0]$ болсо гипотеза кабыл алынат. **19.6.** Эгерде $\overline{X} \leq p_1 + \sqrt{p_1(1-p_1)}\zeta_{1-\varepsilon}/\sqrt{n}$ болсо гипотеза кабыл алынат, мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү квантили. **19.7.** Гипотеза $H_1 = \{p = 1/2\}$, альтернативасы $H_1 = \{p > 1/2\}$; эгерде 56 дан көп ой табылса, адамдын «кадимкидейлиги» гипотезасы кабыл алынат.

19.8. Эгерде $\overline{X} < \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1}\zeta_{1-\varepsilon} / \sqrt{n}$ болсо гипотеза кабыл алынат, мында $\zeta_{1-\varepsilon}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon$ деңгээлдүү квантили. **19.9.** Эгерде $\overline{X} > (1-p_1)/p_1 + (1-p_1)\zeta_\varepsilon / p_1^2\sqrt{n}$ болсо гипотеза кабыл алынат, мында ζ_ε - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн ε деңгээлдүү квантили; 1. **19.10.** Мисал үчүн $X_1 \in [1/3, 1/2]$ болгондо негизги гипотезаны, тескери учурда – альтернативаны кабыл алган критерий; $0{,}5 + \overline{\Phi}(1)$.

§20. Макулдук критерийлери

20.1. $\{X_{(1)} > 1/3\} \cup \{X_{(2)} > 1/3\} \cup \{X_{(2)} > 2/3\} \cup \{X_{(3)} > 2/3\}$; $7/9$.

20.3. $\gamma = 1/6n\varepsilon$. **20.6.** Туура негизги гипотезада көп сандагы гербдерди алуу ыктымалдыгы 0,189 га барабар. **20.7.** Жок. **20.9.** Эгерде $n\left|\overline{X} - p_0\right| / \sqrt{p_0(1-p_0)} < \zeta_{1-\varepsilon/2} / \sqrt{n}$ болсо $p = p_0$ гипотезасы кабыл алынат, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. **20.10.** Эгерде $\sqrt{n}\left|\overline{X} - \lambda_0\right| / \sqrt{\lambda_0} < \zeta_{1-\varepsilon/2}$ болсо $\lambda = \lambda_0$ гипотезасы кабыл алынат, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили. **20.11.** Эгерде:

а) $\left|\overline{X} - 1\right| < \zeta_{1-\varepsilon/2} / \sqrt{n}$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили; б) $\zeta_{\varepsilon/2} < n\overline{(X-1)^2} < \zeta_{1-\varepsilon/2}$, мында ζ_δ - бул эркин даражасы n болгон χ^2 бөлүштүрүүсүнүн δ деңгээлдүү квантили; в) $X_{(1)} < -(\ln\varepsilon)/n$;

г) $\left|2\overline{X} - 1\right| < \zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}(2-\overline{X})} / \sqrt{n}$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили; д) $\left|\overline{X} - 1\right| < \zeta_{1-\varepsilon/2}\sqrt{\overline{X}} / \sqrt{n}$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили; болсо, анда гипотеза кабыл алынат. **20.13.** Ооба; $\alpha_1(\delta) = 2\overline{\Phi}(\sqrt{nm/(n+m)})$. **20.14.** $\overline{\Phi}(c)$; абалдуу. **20.15.** Эгерде $T < \zeta_{1-\varepsilon}$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили, болсо, негизги гипотеза кабыл алынат. **20.17.** $2\sum_{i=0}^{[n/2-\gamma]} C_n^i / 2^n$; $2\overline{\Phi}(2\gamma/\sqrt{n})$; $\sqrt{n}\zeta_{1-\varepsilon/2}/2$, мында $\zeta_{1-\varepsilon/2}$ - бул $N_{0,1}$ бөлүштүрүүсүнүн $1-\varepsilon/2$ деңгээлдүү квантили.

20.21. Туура так гипотезада мындан чоңураак четтөөнү алуу ыктымалдыгы 0,823 кө барабар. **20.22.** Жок. Чыныгы манилүүлүк деңгээли $2{,}7 \cdot 10^{-49}$ га барабар. **20.23.** Туура так гипотезада мындан чоңураак четтөөнү алуу ыктымалдыгы 0,654 кө барабар. **20.24.** А. Жок, чыныгы манилүүлүк деңгээли 0,79 га барабар. В. Жок, чыныгы маанилүүлүк деңгээли 0,022 ге барабар; ооба, бирок жаман: чыныгы маанилүүлүк деңгээли 0,28 ге барабар. С. Жок, чыныгы маанилүүлүк деңгээли $1{,}3 \cdot 10^{-7}$ на барабар; ооба, чыныгы маанилүүлүк деңгээли 0,9 га барабар.

Култаев Т.Ч., Момбекова Г.Б.

Математикалык статистиканын маселелер жыйнагы

Басууга берилди: 07.07.2008.

Формат: 60x84 1/16
Көлөмү: 7,6 б.т.
Буйрутма: №28
Нускасы: 200 даана.

ОшМУ, "Билим" редакциялык-басма бөлүмү
Ош шаары, Ленин к., 331, каб.135., тел.: 7.20.61